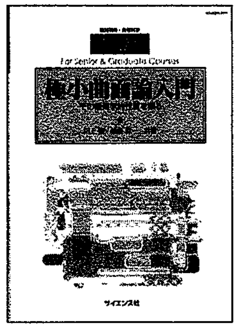
極小曲面論入門

その幾何学的性質を探る



川上裕・藤森祥一共著，B5 判，120 頁，本体 2083 円，サイエンス社

極小曲面とは石鹸膜が形作る曲面である．少なくとも局所的には，同じ境界を持つ曲面の中で面積を最小にすることから，この名がある．このような曲面を求める問題は，面積汎関数に関する変分問題である．変分問題とは極値問題の無限次元版で，通常の関数の一階微分に相当する第一変分を計算することにより，極小曲面の微分方程式 $H \equiv 0$ が導かれる．ここで H は曲面の平均曲率であり，直交座標系により，曲面を局所的に二変数関数 f のグラフとして表すとき，法ベクトル方向が縦軸正方向と一致するような点では $H = \frac{1}{2}\triangle f$ が成り立つ．従って，等温座標系を用いることにより，極小曲面の各成分は調和関数，すなわち正則関数の実部により表すことができる．

極小曲面は古くから幾何学における重要な研究対象の一つであった．その研究は奥が深いが，一方その門を叩くためには，上の説明が理解できる程度に，微分方程式と複素関数論の初歩を少しずつ学んでいれば十分である．よって，数学科に限らず理科系の学部生で十分に学び始められるにもかかわらず，これまで和書で手頃な教科書が書かれてこなかった．数多い曲線と曲面の教科書の次に読むべきものとして，本書のような入門書の登場が待たれていたと言ってよいだろう．

その具体的内容はと眺めてみると，第 1 章は変分問題的アプローチに充てられている．ここでは $\mathbf{R}^3$ 内の曲面を $\mathbf{R}^n$ 内の超曲面の特別な場合として捉え，基本的事実をより一般的な形で述べるために，まずリーマン幾何の基礎が超曲面限定で紹介されている．このスタイルは，$\mathbf{R}^3$ 内の極小曲面の性質のうち，余次元が $3-2=1$ であることからくる性質を浮き彫りにするのが，狙いの一つと思われる．初学者には多少読みづらい点もあるかもしれないが，引き続き高次元の多様体について学ぶ者にとっては，利点もあるだろう．

与えられた境界曲線を持つ極小曲面の存在を問うプラトー問題と，その解の安定性の第二変分による判定，全（超）平面上で定義された関数のグラフとして表される極小（超）曲面は（超）平面に限るか否かというベルンシュタインの問題，そして平面以外の古典的な例がいくつか紹介され，第 1 章は盛り沢山である．

続く第 2 章は複素関数論的アプローチである．極小曲面をリーマン面から $\mathbf{R}^3$ への共形はめ込みとして捉え，リーマン面上の正則もしくは有理型関数の積分を用いて表示したエネパー・ワイエルシュトラスの表現公式が，紙幅を割いて丁寧に解説されている．

任意の極小曲面は局所的には常にこの表現公式を用いて表されるが，一方，任意の有限全曲率完備極小曲面は，コンパクトリーマン面から有限個の点を除いた定義域からの写像として表現できることも知られている．ただし，局所的な表示が大域的に well-defined であるためには，任意の閉曲線に沿う積分に関する周期が消えている必要がある．本章では，この周期問題にも触れ，さらに多くの例が，美しいグラフィックと共に紹介されている．

第 3 章は発展的話題で，まずガウス写像の除外値問題を扱っている．ガウス写像とは曲面の単位法ベクトル場をリーマン球面への写像と考えたもので，平面以外の完備極小曲面において，ガウス写像が球面上の何点までその像から除外できるかという問題への最良の解答として，高々 4 点であるという藤本の定理は有名である．ただし，この 4 点を実現するシャーク曲面は周期性を持ち全曲率が有限でない．そこで，さらに全曲率有限の条件を課した場合にはどうなるのかという問が，高々 3 点であるというオッサーマンの定理の先に，今日もなお未解決問題として残されている．このような最先端の研究課題が，簡潔に解説されている．

締め括りは周期問題の続きである．ここで紹介されるコスタ曲面は，有限全曲率完備極小「埋め込み」の第三の例として登場し，今日の曲面論の隆盛に大きく貢献したエポックメイキングな例と言える．その一般化を含む構成のための周期問題を紹介することで，本書はその難しさと魅力とを同時に伝えている．

加藤　信（大阪市立大学大学院理学研究科）