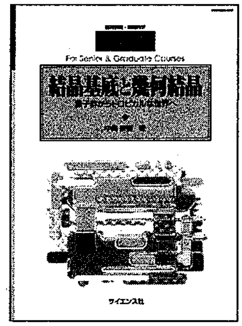
結晶基底と幾何結晶

量子群からトロピカルな世界へ

中島俊樹著，B5 判，192 頁，本体 2204 円，サイエンス社



本書のテーマである結晶基底 “crystal base” は柏原正樹先生が，量子群を本質的に用いて 1990 年の論文で導入した，半単純 Lie 環の表現論の組合せ論的側面を抽出する画期的な対象である．誕生から 30 年，結晶基底の理論は大きく発展しており，今後益々多くの方々の研究・勉強の対象となるであろう．そこで本書が出版され，日本語で基本事項が詳しく勉強可能になったことは意義深く思われる．

結晶基底は Drinfeld–神保の量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現の “$q=0$” での基底であって，Chevalley 生成元の作用の “結晶化”（柏原作用素と呼ばれる）からくる色付き有向グラフ構造（結晶グラフ）を持ったものである．結晶基底の理論は $\mathfrak{g}$ を対称化可能 Kac–Moody Lie 環としても展開できる（一般化 Kac–Moody Lie 環やスーパー Lie 環への拡張の話題もある）が，本書では過度な一般化は行わず，エッセンスの十分に詰まった有限次元半単純 Lie 環の場合が分かりやすく書かれている．

まず 2 章で量子群とその表現論に関する知識が簡潔にまとめられ，3 章以降が本格的な結晶基底の解説である．3 章から 8 章では結晶基底の基本事項からその応用例が豊富な具体例および証明を伴って説明される．結晶基底の理論の驚くべき点の一つは既約表現の構造や既約表現のテンソル積の既約分解の様子が，結晶グラフを用いて組合せ論的に記述される点にある．実際に，4 章の後半から 6 章にかけては A_n 型（$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$）の場合に，既約表現の構造やその間のテンソル積の構造がヤング盤を用いた組合せ論に翻訳されてゆき，最終的には Littlewood–Richardson 規則と同値な規則が結晶基底の理論から導出される．結晶基底の理論は A_n 型に限らないので，この翻訳は Littlewood–Richardson 規則の一般化を感じさせるが，実際に著者の中島先生によって古典型の場合に拡張されている．7 章では，q-ボゾン代数 $B_q(\mathfrak{g})$ の表現の結晶基底が説明される．$B_q(\mathfrak{g})$ の表現論が著者の中島先生の結果を交えて詳しく書かれている．8 章は柏原先生の原論文で “Grand loop” と名付けられた，14 個の有機的に関連する命題を帰納法で並行して証明する結晶基底の存在証明である．証明の道筋は原論文に従っているが，日本語で読めるようになったことは教育的意義があると思われる．なお，標準/大域基底の理論については本書では割愛されている．

9 章ではまず結晶基底から定まる結晶グラフの構造を抽象化した “結晶” が説明される．$U_q(\mathfrak{g})$ の既約表現からくる結晶 $B(\lambda)$ やその親玉である $B(\infty)$ の構造を具体的に調べたいが，そのためには “分かりやすい実現” が必要となる．その一つが本章で説明される多面体表示である．まず $\mathbb{Z}^\infty$ に抽象化された意味での結晶構造を定義し，その中に $B(\lambda)$ や $B(\infty)$ を結晶として埋め込む．そして，その像を不等式系で記述するのである．ランク 2 の場合と A_n 型の場合に具体例の計算が紹介されており，様子がイメージしやすい．

10 章以降は本書のもう一つのテーマである幾何結晶が扱われる．本書は幾何結晶を解説した初の和書である．幾何結晶は結晶構造（重みや柏原作用素など）を代数多様体上の有理関数，$\mathbb{G}_m$-有理作用として幾何的に “持ち上げた” ものとして，Berenstein–Kazhdan によって 2000 年に導入された．“持ち上げ” というのは，正構造を持つ $\mathfrak{g}$-(前)幾何結晶があると，熱帯化，すなわち，トーラスを余指標格子に，有理関数の掛け算を足し算に，足し算を max に変換する操作で，$\mathfrak{g}^\vee$-結晶が得られることによる．ここで $\mathfrak{g}^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の Langlands 双対 Lie 環である．また，旗多様体やその仲間に幾何結晶構造が入ることが説明され，そこに正構造を入れて熱帯化することで，多面体表示に現れた $\mathbb{Z}$ の直積に入る結晶構造が得られることが示される．さらに，“飾り関数” を考えると，その熱帯化によって多面体表示における不等式系の対応物が得られるという事実が紹介され，A_n 型の場合に実際の一致を見て，前半のテーマと繋がったところで本書は締めくくられる．有理関数の熱帯化を用いて必要な部分を切り出す手法は近年盛んなクラスター代数，クラスター多様体の研究にも見られる重要な考え方である．

大矢　浩徳（芝浦工業大学システム理工学部）