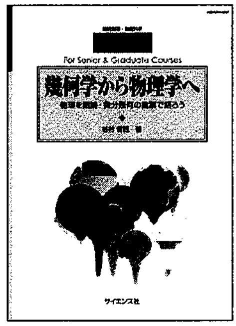

幾何学から物理学へ

物理を圏論・微分幾何の言葉で語ろう

谷村省吾著，B5 判，208 頁，本体 2241 円，サイエンス社

本書では理論物理学においてなんとなく頻繁に現れるような数学的概念を分かりやすく解説し，またそれらの様々な物理学への応用について紹介している．数学としてはサブタイトルにある圏論・微分幾何があるのはもちろんであるが，その前に線形代数についての解説が充実している．実際，大学１年生で習うことの多い微積分学と線形代数は微分幾何学の基礎となるが，「微積分は頑張ればできる気がするが線形代数は何か不安である」と感じている理数系の学生は多いのではないかと思う．例えば，１年生の線形代数の授業で行列に関する様々な計算以外に，抽象的なベクトル空間についてはベクトル空間の基底，線形写像の表現行列，線形写像の像と核，…までやったとしても双対ベクトル空間，商ベクトル空間，ベクトル空間のテンソル積などまでやる時間はないことが多く，それなのに３年生ぐらいになるとこれらのことがなんとなく「線形代数なので既知なもの」とされて授業が進んでいくことが多い．数学以外の，例えば理論物理学などを専攻する学生も，テンソル積の定義を知らないままテンソル積 $\otimes$ がたくさん散りばめられた文献を読む羽目になるかもしれない．これらをとりあえず積 $\times$ が何か強調されたもの…などと思って読み進めるのもありなのかもしれないが，そのようなことをするのがどうも気持ち悪いと感じるならば本書はとても役に立つに違いない．このようなテンソル積の正確な理解は理論物理，微分幾何などにおけるテンソル計算の理論的裏づけを持つことにもつながる．

ベクトル空間のテンソル積は具体的に定義することもできるが，それの他のものたちとの間の関係についての性質を指定することによって定めることもできる．このようにして定められるテンソル積は（同型を除いて）一意的に決まる．このような性質をテンソル積の普遍性と呼ぶが，本書で圏という概念を導入している主な目的はこのような普遍性による議論を明快に行うためであって，圏論自体の研究をするという動機はないと思われる．

微分幾何において，まず可微分多様体を定義するだけであれば線形代数は必要としない．ただ本書では可微分多様体上の微分形式などの応用を目的としている．この微分形式というものが何なのか？という素朴な問いにも本書は分かりやすく答えようとしているように見受けられる．定義の仕方の一つの方向性として，可微分多様体上の微分形式は，可微分多様体の各点の上に接ベクトル空間の双対ベクトル空間の反対称テンソル積の元があって，それらが全体に滑らかにつながっているものであるということができる．そのようなわけで，ベクトル空間のテンソル積やその拡張の定義を明確にし，それらの直感的，視覚的な説明を与えている．微分形式まで出てくれば，ド・ラームコホモロジーが当然出てくる．このような，理論物理学においても頻繁に出てくるホモロジー・コホモロジーについて要領よくまとめられている（これらについては○○がうまく定義されているかどうか，△△が××の選び方によらないかどうか云々の，読むと苦痛を伴う証明などは省略されているので時間と元気が余っていればあげられている参考書等にあたるとよいだろう）．

また本書では，これらの数学的概念の物理学への様々な応用についてもバランスよく紹介されている．例えば可微分多様体における電磁気学，そして，シンプレクティック幾何学とリー群，リー環の簡潔な導入ののち，シンプレクティック商が力学系に応用されている．もう一つ，テンソル積と平行して捻テンソルと呼ばれるものについての理論が展開されていることも本書の特色の一つである．

本書のまえがきには「この本の読み方ガイドは書かない」と宣言されていて，その理由も説明されているので読者はそれぞれ気の趣くままに読めばよいと思うのであるが，たぶんテンソル積を中心とした概念を確実にものにした上で，定義したものの直感的なイメージも持ちつつ，理論物理をこれらの視点から明快に捉えていこうと，少なくとも読者がそういう動機を持って読むならば本書は最高の本であるに違いない．

梶浦 宏成（千葉大学大学院理学研究院）

BOOK REVIEW