付 録B　位相群の表現論 (完全版)

本付録は本文中に登場した位相群の表現論の用語説明のため主に [143] を参考にして書かれた．非常に広域の分野との関連がある種々の表現論のなかでもとりわけ魅力的な研究対象として現在も研究が進められていることを付け加えておこう．特に，Hopf 代数，量子群といった量子可積分系の基礎とも関連する話題でもある．刊行本に掲載された付録 A と本稿を並べてみることで，執筆の舞台裏を想像していただくのも一興かもしれない．

B.1　位相群と不変測度

空間・図形に密着した形で捉えた群は変換群 (transformation group) と呼ばれる．数学者でなくとも，この形の群に接してきた方は多くおられることであろう．本書第 4 章では群論の成果を存分に発揮して物理学における対称性とその破れを題材として扱った．「対称性の破れ」の一般論は未完成であるから，実のところ我々は一形態でしかない変換群ですら理解しているとは言えず，その全容を把握するに至ってないのである．けれども今後研究が進展すれば，変換群＝対称性の理解に必ず還元され，本書およびこの付録では扱い切れていない領域にまで影響が及び得る．本付録では位相群の表現論を扱うため，今後も発展が期待されるこの分野の中でも特に美しい調和解析的側面をご覧いただくことにしたいが，著者の力量不足並びに不見識を予め断っておく．

まずは復習から始めよう．集合 G は，G 上に積 $G \times G \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2 = g_1 g_2 \in G$ が定義されており，かつ次の性質を満たすとき**群** (group) と呼ばれる：
(1) 積は結合律を満たす，すなわち，任意の $g_1, g_2, g_3 \in G$ に対し，

$$g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3;$$

(2) G は単位元 e をもつ，すなわち，e は任意の $g \in G$ に対し $ge = g = eg$；
(3) 任意の G の元 g に対し，$gh = hg = e$ を満たす元 h が存在する．この元 h を g^{-1} と表し，g の逆元と呼ぶ．

群 G の任意の異なる元 $g_1, g_2 \in G$ に対し，$g_1 g_2 = g_2 g_1$ となるものを可換群，そうでないものを非可換群と呼ぶ．置換群と自由群は典型的な非可換群である．置換群については多くの教科書で明晰に扱われているため本書では割愛するが（専門家の想像を掻き立てる素晴らしい記述に触れて頂きたい），置換群一つ

でも群論の魅力と本質（の一端）を味わうには十分過ぎる題材である．例えば，[TH06]（とその引用文献）をご覧いただきたい．

抽象群としての群はそれ自身閉じた数学的対象として定義されている．対象の間のつながりを射によって記述する圏論的な見方に立てば，ただ 1 つの対象 $*$ からなり，射は $*$ を $*$ 自身に移すものとして定義される（4.2 節参照）．これに対して，変換群・亜群は対象の非自明な構造に注意が向いている．この土台の上で群の表現論を見れば，対象 $*$ を表現空間に写してそこで射を表現することになる．これは圏論的な見方をすれば圏としての群から線型空間の圏への函手に他ならない．群の表現論とはそのような参照先を構成・分類し，群の構造理解への還元を試みる数学的方法論である．本稿では次の性質を満たす群に限って議論を進めていく：

定義 1 (位相群). 集合 G は，群であり，かつ位相空間であって，群の演算 $G\times G \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1^{-1}g_2 \in G$ がその位相で連続であるとき，**位相群** (*topological group*) と呼ばれる．

本書で登場する位相群はすべて調和解析が可能な局所コンパクト Hausdorff 位相群 (以後単に局所コンパクト群と呼び，第 2 可算公理も仮定されることもある) に限られる．物理的興味のある群は (自由群，局所ゲージ群，微分同相写像のなす群を除けば) 局所コンパクト群であって，数学的にも十分一般的かつ魅力的な対象である．以下は調和解析・誘導表現・接合積・augmented algebra の理論を展開するために不可欠な局所コンパクト群上の測度論を展開する．変換群の観点を積極的に活用し，群が作用する空間 X として G 自身が選ばれる状況の特殊性から導かれる美しい結果の連なりである．

X を局所コンパクト空間とし，X の相対コンパクト開集合の族から生成される Borel 集合族を $\mathcal{B}$ と表す．X 上のコンパクトな台をもつ複素数値連続関数の全体 $C_c(X)$ の元を可積分にするため，X 上の Borel 測度はコンパクト可測集合で有限であること仮定する．このとき，X 上の Borel 測度 μ は σ-有限である．$C_c(X)$ を可測にする最小の Borel 集合族 $\mathcal{B}_0$ の元を Baire 集合と呼び，$\mathcal{B}$ 上で定義されたコンパクト可測集合上全て有限な測度を Baire 測度と呼ぶ．局所コンパクト空間 X 上の正則 Borel 測度 μ を与えることと，μ を $\mathcal{B}_0$ に制限して得られる測度が Baire 測度となることは同値である．

局所コンパクト空間 X に局所コンパクト群 G が同相な作用 $G \times X \to X$ をしており以下の 3 条件を満たすとする：

(1) 任意の $x \in X$ に対して，$ex = x$；

(2) 任意の $g_1, g_2 \in G$ および $x \in X$ に対して，$(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$；

(3) 写像 $G \times X \ni (g, X) \mapsto gx \in X$ は連続である．

この作用は同相写像であるため，Baire 集合の全体 $\mathcal{B}_0$ を自身へ移す．$\Delta \in \mathcal{B}_0$ に対して $gE = \{gx | x \in \Delta\} \in \mathcal{B}_0$ なので，X 上の正則 Borel 測度 μ と任意の $g \in G$

に対して，

$$ {}_g\mu(\Delta) = \mu(g\Delta), \quad (\Delta \in \mathcal{B}_0) \tag{B.1} $$

と定めると，${}_g\mu$ も X 上の正則 Borel 測度となる．局所コンパクト空間 X 上の正則 Borel 測度 μ に対して次の性質を定義する：

(i) 任意の $g \in G$ に対して ${}_g\mu = \mu$ であるとき，G-**不変** (G-invariant),

(ii) G 上のある関数 $\xi(g)$ があって任意の $g \in G$ に対し ${}_g\mu = \xi(g)\mu$ となるとき，G-**相対不変** (G-relative-invariant),

(iii) 任意の $g \in G$ に対して ${}_g\mu$ と μ が同値であるとき，G-**準不変** (G-quasi-invariant).

そして，μ が G-準不変測度であるとき，${}_g\mu$ の μ に対する Radon-Nikodým 微分 $\dfrac{d_g\mu}{d\mu}(x) =: \varrho(g,x)$ を μ の**密度関数** (density function) と呼ぶ．以下での loc. μ-a.e. とは“ 任意の μ-有限集合の上で μ-a.e. に成立する ”ことを意味する，locally almost everywhere の略である．

命題 2. X 上の G-準不変測度 μ の密度関数 $\varrho(g,x)$ は次を満たす：

(1) 任意の $g \in G$ に対して X 上で局所可積分である．すなわち，任意の X のコンパクト集合 D に対して $\displaystyle\int_D d\mu(x)\ \varrho(g,x) < \infty$.

(2) $\varrho(e,x) = 1 \quad$ *loc. μ-a.e.* .

(3) 任意の $g \in G$ に対し $0 < \varrho(g,x) < \infty \quad$ *loc. μ-a.e.* .

(4) 任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して，$\varrho(g_1g_2,x) = \varrho(g_1,g_2x)\varrho(g_2,x) \quad$ *loc. μ-a.e.*.

(5) X の開集合 U で $G \cdot U = \{gx \mid g \in G,\ x \in U\} = X$ となるものに対して，任意の $g \in G$ で $0 < \displaystyle\int_U d\mu(x)\ \varrho(g,x)$.

この命題は G と X からなる亜群 $G \times X$ の性質を反映した可積分関数（(1), (2) と (4) を満たす関数）の存在が X 上の G-準不変測度から了解されることを示している．μ が G-準不変の特殊な場合である G-相対不変なときは密度関数が G の“ 表現 ”の役割を担っていることが従う：

系 3. μ が G-相対不変測度であるとき，その密度関数 $\xi(g) = \dfrac{d_g\mu}{d\mu}$ は G 上の正実表現である．すなわち，

(i) 任意の $g \in G$ に対して，$0 < \xi(g) < \infty$.

(ii) 任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して，$\xi(g_1g_2) = \xi(g_1)\xi(g_2)$.

(iii) G 上の関数 $G \ni g \mapsto \xi(g) \in \mathbb{R}_+$ は連続である．

これまでは一般の局所コンパクト空間 X に局所コンパクト群 G が同相な作用をする場合を考えてきた．次に，G を局所コンパクト群として $X = G$ の場合を考える（位相群の定義から X への G の作用に関する条件は自明となる）.

定義 4 (位相群の不変測度). G 上の G-不変な正の正則 *Borel* 測度を G 上の (**左**) **不変測度** ((*left*) *invariant measure*)，もしくは，(**左**) ***Haar* 測度** ((*left*) *Haar measure*) と呼ぶ．一方，G が右から作用する場合を考えるとき，右作用で G-不変な G 上の正の正則 *Borel* 測度を G 上の右不変測度 (*right invariant measure*)，もしくは，右 *Haar* 測度 (*right Haar measure*) と呼ぶ．G 上の G-不変な正の正則 *Borel* 測度が左不変かつ右不変であるとき両側不変であると呼ばれる．

加法群 $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度は典型的な Haar 測度である．他にも $SO(n)$, $SU(n)$, $SL(n,\mathbb{F})$ ($\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{C}$) などの古典群上の Haar 測度の存在は具体的な計算によって示すことができる．けれども，一般の局所コンパクト群では具体的な構成は到底不可能であるから，存在証明が問題となる．これに関しては一意性も含めて A. Weil によって示されてる：

定理 5 (A. Weil). 任意の局所コンパクト群上には零でない右不変測度および左不変測度が存在し，それぞれ正の定数倍を除いて一意に定まる．

この定理は A. Weil によって示された．そして，自然と思いつくのは「(左あるいは右) 不変測度が存在する位相群であるための条件は何か？」という疑問である．この疑問に対する解答も A. Weil によって与えられている．それが次の定理である：

定理 6 (A. Weil の逆定理). $(G,\mathcal{B}(G),\mu)$ を可測群上の分離的測度空間とする．$\mu\neq 0$ ならば以下を満たす局所コンパクト群 $\tilde{G}$ が存在する：
(α) G は $\tilde{G}$ の稠密部分群である；
(β) $\tilde{G}$ の *Baire* 集合族 $\mathcal{B}_0(\tilde{G})$ に対して，

$$G\cap\mathcal{B}_0(\tilde{G}) := \{G\cap\Delta \mid \Delta\in\mathcal{B}_0(\tilde{G})\}\subset\mathcal{B}(G); \tag{B.2}$$

(γ) $\tilde{\mu}(\Delta):=\mu(\Delta\cap G)$ ($\Delta\in\mathcal{B}_0(\tilde{G})$) は $\tilde{G}$ 上の右不変測度である；
(δ) 次の表示を持つ G 上の連続関数は $\tilde{G}$ へと連続に拡張され，$\tilde{G}$ の位相を生成する：

$$\langle h_1|\rho_g h_2\rangle = \int_G d\mu(g')\,\overline{h_1(g')}h_2(g'g), \quad h_1,h_2\in L^2(G,\mu). \tag{B.3}$$

ここで，$(\rho_g f)(g') = f(g'g)$ ($g,g'\in G,\ f\in\boldsymbol{U}(L^2(G,\mu))$) によって定義される G の $L^2(G,\mu)$ 上の表現である．

定理中の用語について説明しよう．(Hausdorff) 位相群 G が**可測群** (measurable group) であるとは，任意の $\mathcal{B}(G)\times\mathcal{B}(G)$ 可測集合の写像 $G\times G\ni(g,g')\mapsto(g,g^{-1}g')\in G\times G$ による逆像がまた $\mathcal{B}(G)\times\mathcal{B}(G)$ 可測であるときをいう．可測群上の局所化可能測度に対する右不変性は正則 Borel 測度と同様に定義される．可測群上の測度空間 $(G,\mathcal{B}(G),\mu)$ が分離的であるとは，単位元でない任意の

$g \in G$ に対して，$\langle h_1|\rho_g h_2\rangle \neq \langle h_1|h_2\rangle$ となる $h_1, h_2 \in L^2(G,\mu)$ が存在するときをいう．定理 6 の証明は非常に具体的な構成を経て行われている．詳細は [143] および [Yamasaki78] を参照していただきたい．

以下，局所コンパクト群 G の不変測度を μ で表す．任意の $g \in G$ に対し，不変測度への G の右作用により定義される測度 $\mu_g(\Delta) = \mu(\Delta g^{-1})$ $(\Delta \in \mathcal{B}_0)$ はまた左不変になる．G 上の左不変測度の一意性から，g に依存するある正の定数 $\Delta(g)$ が存在して $\mu_g = \Delta(g)\mu$ となる．系 3 の結果と同様に $\Delta(g)$ は G 上の正実表現となる．$\Delta(g)$ を G 上の**モジュラー関数** (modular function) と呼び，Δ_G と表す．そして，恒等的に $\Delta_G(g) = 1$ となる群を**ユニモジュラー群** (unimodular group) と呼ぶ．

不変測度が有限測度であるための必要十分条件は G がコンパクト群であることである．通常コンパクト群上の不変測度は規格化する．局所コンパクト可換群およびコンパクト群はユニモジュラーである．H を局所コンパクト群 G の閉部分群とするとき，商空間 G/H 上の零でない 2 つの G-準不変測度は互いに絶対連続である．G がユニモジュラーならばその閉正規部分群もユニモジュラーである．

次節で位相群の表現論について解説する前に，代数への群作用について確認しておこう．本節で扱った局所コンパクト群 G の局所コンパクト空間 X への同相な作用 $G \times X \to X$ は次で定義される X 上の連続関数への連続な作用 $\tau : G \times C(X) \to C(X)$ を誘導する：任意の $f \in C(X)$ に対して，

$$(\tau_g f)(x) = f(gx), \quad x \in X. \tag{B.4}$$

C*-代数の観点からは G の $C(X)$ への作用 τ を C*-代数 $C_0(X)$ 上へと制限する．尚，X がコンパクト空間である場合には $C(X)$ が単位的な C*-代数となる．この場合を参考にして一般の単位的 C*-代数 $\mathcal{X}$ への G の作用を考察しよう．局所コンパクト群 G の C*-代数 $\mathcal{X}$ への強連続な作用 α とは，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して $\alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2} = \alpha_{g_1 g_2}$，$\alpha_e = id_{\mathcal{X}}$，並びに，任意の $A \in \mathcal{X}$ に対して，

$$\lim_{g \to e} \|\alpha_g(A) - A\| = 0 \tag{B.5}$$

を満たす *-準同型写像 $\alpha : G \to Aut(\mathcal{X})$ のことであった (4.2 節参照)．また，α の $\mathcal{X}$ の線型汎関数 $\mathcal{X}^*$ への連続な作用は，任意の $\omega \in \mathcal{X}^*$ に対して，

$$(\alpha_g^* \omega)(X) = \omega(\alpha_g(X)), \quad X \in \mathcal{X} \tag{B.6}$$

で定義される．$\alpha^* : G \times E_{\mathcal{X}} \to E_{\mathcal{X}}$ は同相な作用となる．$\mathcal{X}$ が可換である場合には先に議論した状況が再現されて，任意の $g \in G$ に対して α_g^* の作用をコンパクト空間 $Spec(\mathcal{X})$ へ制限することで G の同相な作用 $\alpha^*|_{Spec(\mathcal{X})} : G \times Spec(\mathcal{X}) \to Spec(\mathcal{X})$ が得られる．そして，Gel'fand-Naimark の定理から $Spec(\mathcal{X})$ 上の連続

関数環 $C(Spec(\mathcal{X}))$ と $\mathcal{X}$ は同型であって，この 2 つの C*-代数の間の同型写像 (Gel'fand 変換) により，α と次で定義される $\alpha^r : G \times C(Spec(\mathcal{X})) \to C(Spec(\mathcal{X}))$ の一対一対応が得られる：任意の $\widehat{A} \in C(Spec(\mathcal{X}))$ に対し，

$$(\alpha_g^r \widehat{A})(\chi) := \widehat{A}(\alpha_g^* \chi), \quad \chi \in Spec(\mathcal{X}). \tag{B.7}$$

B.2　位相群の表現論

B.2.1　基本事項

$\mathcal{L}$ を複素数体上の Banach 空間とし，$\boldsymbol{B}(\mathcal{L})$ で $\mathcal{L}$ 上の有界作用素全体，$\boldsymbol{B}^\times(\mathcal{L})$ で $\mathcal{L}$ 上の可逆な有界作用素全体，そして $\boldsymbol{U}(\mathcal{L})$ で $\mathcal{L}$ 上のユニタリー作用素全体を表す．また，$\mathcal{H}$ で複素数体上の Hilbert 空間を表す．

定義 7 (表現とユニタリー表現). G を位相群とする．ある *Banach* 空間 $\mathcal{L}$ 上の有界作用素全体 $\boldsymbol{B}^\times(\mathcal{L})$ への代数的準同型 $G \ni g \mapsto T_g \in \boldsymbol{B}^\times(\mathcal{L})$ が強連続であり，$T_e = I_{\mathcal{L}}$ を満たすとき，G の (**線型**) **表現** ((*linear*) *representation*) と呼び，$\omega = (T_g, \mathcal{L})$ と表す．$\mathcal{L}$ を G の表現空間と呼ぶ．

特に，*Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の表現 $\omega = (U_g, \mathcal{H})$ であって，任意の $g \in G$ に対して $U_g \in \boldsymbol{U}(\mathcal{H})$ となるとき，ω を G の**ユニタリー表現** (*unitary representation*) と呼ぶ．今後はユニタリー表現を単に表現と呼ぶこともある．

本稿で扱う位相群の表現はユニタリー表現のみであり，考察する群の位相的性質や“ 大きさ ”によっては無限次元 Hilbert 空間が“ 自然 ”な表現空間となる．局所コンパクト群の表現論では Hilbert 空間の次元は高々可算，すなわち可分な Hilbert 空間に限定しても良い．具体的に扱うユニタリー表現の表現空間が可分でなければ事実上扱い不可能，というのは感覚的に了解可能だろう．この感覚は正当化されていて，群のユニタリー表現から群を再構成する「双対定理」の文脈において“ 全て ”の表現を集める作業が入ってくるのだが,“ 全て ”の範囲を「基数 $\aleph_0$ と $\dim L^2(G, dg)$ のうちで大きい方を超えないもの」に制限しても実行可能なことが知られている[1]．量子論で登場する Hilbert 空間は可分であることが通常仮定されており，今後扱う Hilbert 空間には可分性を仮定する．

局所コンパクト群 G が C*-代数 $\mathcal{X}$ に強連続な作用 $\alpha : G \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ をしている状況を考える．$\omega \in E_{\mathcal{X}}$ が (G, α)-不変，単に G-不変であるとは，任意の $g \in G$ に対して，

$$\omega(\alpha_g(X)) = \omega(X), \quad X \in \mathcal{X} \tag{B.8}$$

[1]正当化ではなく結果的に証明されただけかもしれない．これに関しては追究が必要だろう．

が成り立つことをいう．このようなG-不変状態ωに対するGNS表現$(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega)$をとる．そこで，任意の$g \in G$に対して，

$$U_\omega(g)\pi_\omega(X)\Omega_\omega := \pi_\omega(\alpha_g(X))\Omega_\omega, \quad X \in \mathcal{X} \tag{B.9}$$

と定義すると，$U_\omega(g)$は$\mathcal{H}_\omega$の稠密部分空間$\pi_\omega(\mathcal{X})\Omega_\omega$上の線型作用素となる．このとき，任意の$g \in G$に対して，

$$\pi_\omega(\alpha_g(X)) = U_\omega(g)\pi_\omega(X)U_\omega(g)^*, \quad X \in \mathcal{X}, \tag{B.10}$$

$$U_\omega(g)\Omega_\omega = \Omega_\omega. \tag{B.11}$$

そして，次の評価が成り立つ：任意の$g \in G$, $X \in \mathcal{X}$に対して，

$$\begin{aligned}\|U_\omega(g)\pi_\omega(X)\Omega_\omega\|^2 &= \|\pi_\omega(\alpha_g(X))\Omega_\omega\|^2 = \langle \pi_\omega(\alpha_g(X))\Omega_\omega | \pi_\omega(\alpha_g(X))\Omega_\omega \rangle \\ &= \langle \Omega_\omega | \pi_\omega(\alpha_g(X^*X))\Omega_\omega \rangle = \omega(\alpha_g(X^*X)) \\ &= \omega(X^*X) = \|\pi_\omega(X)\Omega_\omega\|^2.\end{aligned}$$

それ故，任意の$g \in G$に対して$U_\omega(g)$は$\mathcal{H}_\omega$上のユニタリー作用素となる．したがって，$\mathcal{X}$上にG-不変状態が存在すれば，その状態のGNS表現に伴ってGのユニタリー表現が構成される．この場合には4つ組$(\pi_\omega, U_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega)$をGNS表現と呼ぶ．

上と同じく，G上の正定値測度νに対してもGNS構成が実行できる．G上の複素測度νが正定値であるとは，任意の$f \in C_c(G)$に対して次を満たすことである：

$$\nu * f^{\#} * f = \int_G d\nu(g_1) \left\{ \int_G dg_2 \; \Delta_G(g_2)^{-1} \overline{f(g_2^{-1})} f(g_2^{-1}g_1^{-1}) \right\} \geq 0. \tag{B.12}$$

$C_c(G)$上の前内積を，任意の$f_1, f_2 \in C_c(G)$に対し，

$$\langle f_1 | f_2 \rangle_\nu = \int_G d\nu(g_1) \left\{ \int_G dg_2 \; \Delta_G(g_2)^{-1} \overline{f_1(g_2^{-1})} f_2(g_2^{-1}g_1^{-1}) \right\} \geq 0. \tag{B.13}$$

で定義し，C*-代数の場合（2.1節参照）と同様にHilbert空間$\mathcal{H}_\nu$を構成する．そして，任意の$f \in C_c(G)$, $g \in G$に対して$(U_g^0 f)(g') = f(g^{-1}g')$ $(g' \in G)$と定義するとU_g^0 $(g \in G)$は$\mathcal{H}_\nu$上の拡張U_g $(g \in G)$を持ち，任意の$g \in G$に対して$U_g \in \boldsymbol{U}(\mathcal{H}_\nu)$を満たす．$(U_g, \mathcal{H}_\nu)$はGNS表現と呼ばれる．正定値測度$\nu$が局所可測な正定値関数$\varphi$により$d\nu(g) = \varphi(g)\,dg$と与えられているときには，GNS表現は巡回的で，巡回ベクトルΩ_φを以下を満たすように選ぶことができる：

$$\varphi(g) = \langle \Omega_\varphi | U_g^\varphi \Omega_\varphi \rangle, \quad \text{a.e.-}dg. \tag{B.14}$$

この表示より，φはG上の連続関数である．

上の 2 つの例のように表現は一見表現とは無縁の数学的構造から自然に構成される（これらの例は正定値核（2.1 節参照）の方法という共通の方法に基づいている）．表現が付随する数学的対象は表現を積極的に利用することで元の構造・性質を比較的容易に解析が可能である．その代表例が局所コンパクト可換群に対する Fourier 変換とコンパクト群に対する Peter-Weyl の定理である．これらについては後述するとして，まずは表現を分類するために表現の基本単位を以下で定義していく．

定義 8. (x) G 上の恒等写像 $G \ni g \mapsto 1$ を**単位表現** *(unit representation)* と呼び，$\mathbf{1} = (1, \iota)$ と表す；
(y) 複素数値連続関数 χ で $\chi(g_1g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$ $(g_1, g_2 \in G)$ を満たすものを**指標** (*character*) と呼ぶ．特に任意の $g \in G$ に対して $|\chi(g)| = 1$ となるものを**ユニタリー指標** (*unitary character*) と呼ぶ．特に，可換群 H 上の指標全体を $\widehat{H}$ と表す；
(z) G 上のユニタリー表現 $(\mathcal{H}, U)$ は $U(G)'' \cap U(G)' = \mathbb{C}1$ を満たすとき，**因子表現** (*factor representation*) と呼ぶ.

定義 9 (繋絡作用素). *2* つの表現 $\omega_i = (\mathcal{L}_i, T_g^i)$ $(i = 1, 2)$ に対し，有界線型作用素 $R : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ であって，$RT_g^1 = T_g^2R$ を満たすものを**繋絡作用素** (*intertwining operator*) と呼ぶ.

定義 10 (表現の分類). 表現 $\omega = (T_g, \mathcal{L})$ について以下の分類を用いる：
(i) *Banach* 空間 $\mathcal{L}$ の部分空間 $\mathcal{L}'$ で $T.\mathcal{L}' = \{T_g\xi \mid g \in G, \xi \in \mathcal{L}'\} \subseteq \mathcal{L}'$ となるものを G-**不変部分空間** (G-*invariant subspace*) と呼ぶ．表現 $\omega = (T_g, \mathcal{L})$ が 0 と $\mathcal{L}$ 以外の非自明な G-不変閉部分空間を持たないとき，表現は**既約** (*irreducible*) であるといい，そうでないとき**可約** (*reducible*) であるという.
(ii) 表現 $\omega = (T_g, \mathcal{L})$ が G-不変閉部分空間 $\mathcal{L}'$ をもつとき，T_g を $\mathcal{L}'$ に制限して得られる表現 $\omega' = (T_g|_{\mathcal{L}'}, \mathcal{L}')$ を ω の**部分表現** (*subrepresentation*) と呼ぶ.
(iii) 表現 $\omega = (T_g, \mathcal{L})$ が**完全可約** (*completely reducible*) であるとは，任意の部分表現 $\omega_1 = (T_g^1, \mathcal{L}_1)$ に対して ω の異なる部分表現 $\omega_2 = (T_g^2, \mathcal{L}_2)$ であって，$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{0\}$，$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ となるものが存在する場合をいう．このとき，ω_2 を $\omega \ominus \omega_1$ で表す．一般に，$\omega \ominus \omega_1$ は一意には定まらない.
(iv) *2* つの表現 $\omega_1 = (T_g^1, \mathcal{L}_1)$ と $\omega_2 = (T_g^2, \mathcal{L}_2)$ の間に有界な逆をもつ繋絡作用素 $R : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ があって，$R\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ を満たすとき，ω_1 と ω_2 は同値であるといい，R を同値対応という．特に，ω_1 と ω_2 がともにユニタリー表現で，R がユニタリー作用素にとれるとき，この *2* つの表現は**ユニタリー同値** (*unitarily equivalent*) であるという.

ユニタリー表現 $(\mathcal{H}, U)$ が既約であることと $U(G)' = \mathbb{C}1$ は等価である．また，既約ユニタリー表現は因子表現である．今後，G の表現で表現 Hilbert 空間

の次元が「基数 $\aleph_0$ と $\dim L^2(G,dg)$ のうちで大きい方を超えないもの」全体を $Rep(G)$ で表し，$Rep(G)$ に属する既約表現全体を $\widehat{G}$ で表す．G が可換群であるとき，$\widehat{G}$ はまさに G 上の指標全体と一致する．また，コンパクト群の既約表現は必ず有限次元 Hilbert 空間を表現空間にもつことが知られており，この場合には上の条件は不要である．

次にユニタリー表現の上の自然な演算を定義し，ユニタリー表現の（直和）分解を考察する．

定義 11 (直和とテンソル積)**.**
(1) ユニタリー表現の族 $\{\omega_j = (U_g^j, \mathcal{H}_j) \mid j \in J\}$ に対し，直和 *Hilbert* 空間

$$\oplus_{j\in J}\mathcal{H}_j = \{\xi = (\xi_j)_{j\in J} = \oplus_{j\in J}\xi_j \mid \|\xi\|^2 = \sum_{j\in J}\|\xi_j\|^2 < \infty\}$$

上に $(\oplus_{j\in J}U_g^j)\xi = (U_g^j\xi_j)_{j\in J}$ $(\xi = (\xi_j)_{j\in J} \in \oplus_{j\in J}\mathcal{H}_j)$ によって定まるユニタリー表現 $(\oplus_{j\in J}U_g^j, \oplus_{j\in J}\mathcal{H}_j)$ をユニタリー表現の族 $\{\omega_j = (U_g^j, \mathcal{H}_j) \mid j \in J\}$ の直和とよび，$\oplus_{j\in J}\omega_j = (\oplus_{j\in J}U_g^j, \oplus_{j\in J}\mathcal{H}_j)$ と表す.
(2) 局所コンパクト群 G と H それぞれのユニタリー表現 $\omega = (U_g, \mathcal{H})$, $\omega' = \{\mathcal{K}, V_h\}$ から構成されるテンソル積 *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ とその上に定義される強連続な準同型 $U_g \otimes V_h$ の組 $(U_g \otimes V_h, \mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ をユニタリー表現 ω と ω' の (**外部**) **テンソル積** ((*outer*) *tensor product*) と呼び，$\omega \mathbin{\widehat{\otimes}} \omega'$ で表す．可算個のユニタリー表現のテンソル積も同様に定義される．また，局所コンパクト群 G の *2* つの表現 $\omega_1 = (U_g^1, \mathcal{H}_1)$, $\omega_2 = (U_g^2, \mathcal{H}_2)$ から構成される表現 $(U_g^1 \otimes U_g^2, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}^2)$ を (**内部**) **テンソル積** ((*inner*) *tensor product*) と呼び，$\omega_1 \otimes \omega_2$ で表す.

表現の上の演算が定義されたので，$Rep(G)$ の圏論的構造を見ていこう．$Rep(G)$ は各ユニタリー表現 $\omega = (U_\omega, \mathcal{H}_\omega)$ を対象とし，2 つの対象 $\omega_i = (U_{\omega_i}, \mathcal{H}_{\omega_i})$ $(i = 1, 2)$ の間の 0 でない繋絡作用素 $R : \mathcal{H}_{\omega_1} \to \mathcal{H}_{\omega_2}$ を射 $\omega_1 \to \omega_2$ とする圏である．そして，$Rep(G)$ 上には（内部）テンソル積によるテンソル圏の構造が入る．つまり，2 つの対象 $\omega_i = (\mathcal{H}_{\omega_i}, U_{\omega_i})$ $(i = 1, 2)$ のテンソル積 $\omega_1 \otimes \omega_2$ はまた $Rep(G)$ の対象であって，2 つの繋絡作用素 $R_i : \mathcal{H}_{\omega_i} \to \mathcal{H}_{\varrho_i}$ $(i = 1, 2)$ のテンソル積

$$R_1 \otimes R_2 : \mathcal{H}_{\omega_1} \otimes \mathcal{H}_{\omega_2} \to \mathcal{H}_{\varrho_1} \otimes \mathcal{H}_{\varrho_2} \tag{B.15}$$

は $\omega_1 \otimes \omega_2$ と $\varrho_1 \otimes \varrho_2$ の繋絡作用素となり再び $Rep(G)$ の射となる（テンソル積に対する結合律は各自で確認してほしい）．G が局所コンパクト群の場合には $Rep(G)$ はテンソル積に対して半群の構造を持つのに対して，$\widehat{G}$ が群の構造をもち，$\widehat{G}$ は $Rep(G)$ の特殊な部分圏として局所コンパクト群の構造解析に一役買う.

定義 12 (直和分解)**.** G の表現 ω が表現の族 $(\omega_j | j \in J)$ の直和 $\oplus_{j\in J}\omega_j$ と同値であるとき，ω は族 $\{\omega_j \mid j \in J\}$ により (離散) 直和分解されたという．そして，

各 ω_j を ω の直和成分とよぶ．表現 ω の直和分解 $\oplus_{j\in J}\omega_j$ においてある $j \in J$ の直和成分 ω_j が既約表現であるとき，ω_j を既約成分とよぶ．特に，任意の直和成分が既約成分であるとき，その直和分解を既約分解と呼ぶ．

ユニタリー表現の族の直和 $\sigma := \oplus_{j\in J}\omega_j$ が任意の $j \in J$ に対して $\omega := \omega_{j_0} = \omega_j$ $(j_0 \in J)$ を満たすとき，$\oplus_{j\in J}\omega_j$ を ω の同一コピーの直和と呼ぶ．そして，ω が既約表現のとき J の濃度 $|J|$ を σ の ω に対する重複度と呼び，$[\sigma:\omega]$ と表す．そして，一般のユニタリー表現 σ を既約分解した場合に，既約成分 ω の濃度を $[\sigma:\omega]$ で表し，この場合にも重複度と呼ぶ．

以下では，$\mathcal{K}$ として局所コンパクト群 G とその上の左不変測度 $\mu(d_G g$ とも書く) より作った Banach 空間 $L^p(G) := L^p(G,\mu)$ （$1 \le p < \infty$）あるいは $L^\infty_0(G)$ $(p=\infty)$ を用いる．$L^\infty_0(G)$ は無限遠で 0 になる連続関数の全体 $C_0(G)$ の L^∞ のノルム $\|\cdot\|_\infty$ による閉包である．

定義 13 (正則表現). 任意の $f \in \mathcal{K}$ と $g \in G$ に対して，$(\lambda_g f)(g') = f(g^{-1}g')$ （$g' \in G$）で定義される $\mathcal{K}$ 上の線型写像 $G \ni g \mapsto \lambda_g \in \boldsymbol{B}^\times(\mathcal{K})$ は G の強連続な準同型写像である．$\mathcal{L}^p = (\lambda_g, \mathcal{K})$ を G の L^p**-(左) 正則表現** ((*left*) *regular representation*) という．特に，$p=2$ のときを単に (左) 正則表現と呼ぶ (このとき，$\mathcal{L} = \mathcal{L}^2$ は $\mathcal{K} = L^2(G)$ 上のユニタリー表現).

同様に，$\mathcal{L}$ の任意の元 f 及び $g \in G$ に対して，$(\rho_g f)(g') = (\Delta(g))^{-1/p} f(g'g)$ （$g' \in G$）で定まる $\mathcal{K}$ 上の線型写像 $G \ni g \mapsto \rho_g \in \boldsymbol{B}^\times(\mathcal{K})$ は G の強連続な準同型写像である．この $\mathcal{R}^p = (\rho_g, \mathcal{K})$ を G の L^p-右正則表現という．特に，$p=2$ のときを単に右正則表現と呼ぶ (このとき，$\mathcal{R} = \mathcal{R}^2$ は $\mathcal{K} = L^2(G)$ 上のユニタリー表現).

Kac-竹崎作用素の定義を行おう．群の正則表現 $(\lambda, L^2(G))$ および表現 $(\gamma, \mathcal{H}_\gamma)$ における **Kac-竹崎 (K-T) 作用素** (Kac-Takesaki operator) W と W_γ のそれぞれは以下のように定義される：

$$(W\xi)(g_1, g_2) := \xi(g_2^{-1}g_1, g_2), \quad (W_\gamma v)(g) := \gamma_g v(g), \tag{B.16}$$

ただし，$g_1, g_2, g \in G,\ \xi \in L^2(G\times G), v \in \mathcal{H}_\gamma \otimes L^2(G)$ であり，五項関係式 (pentagonal relation) と呼ばれる次の関係式を満たす：

$$W_{23}W_{13}W_{12} = W_{12}W_{23}, \quad W_{23}(W_\gamma)_{13}(W_\gamma)_{12} = (W_\gamma)_{12}W_{23}, \tag{B.17}$$

ここで，K-T 作用素 W_{ij} および $(W_\gamma)_{ij}$ $(i=1,2,3)$ とは Hilbert 空間 $\mathcal{H}\otimes L^2(G)\otimes L^2(G)$ $(\mathcal{H} = L^2(G)$ もしくは $\mathcal{H}_\gamma)$ をテンソル積の左から順に 1, 2, 3 としたとき，i 番目と j 番目の Hilbert 空間をまたいで定義される K-T 作用素 W および W_γ という意味である．また，次の交換関係を満たす：

$$W(\lambda\otimes\lambda) = (\iota\otimes\lambda)W, \quad W_\gamma(\gamma\otimes\lambda) = (\iota\otimes\lambda)W_\gamma. \tag{B.18}$$

ただし，ι は単位表現である．

K-T 作用素の物理的な文脈での活用については 3 章および 4 章を読んで頂くとして，数学的にはこの作用素の特徴づけが気になるところである．つまり，局所コンパクト群 G のユニタリー表現から定まる自然なユニタリー作用素であるが，

「K-T 作用素はどの程度局所コンパクト群 G を反映しているのだろうか？」

という問題である．この疑問に対しては K-T 作用素（特に正則表現から定まる $W = W_\lambda$）が満たしている性質から解き明かしていこう．まずは次の補題である．

補題 14. $\mathcal{H}$ を *Hilbert* 空間とする．$A \in \boldsymbol{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ に対して，次のように定義される $A(u,v)$（$u,v \in \mathcal{H}$）は u,v に対して半双線型な $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素である：$\{w_j \mid j \in J\}$ を $\mathcal{H}$ の完全正規直交系とする．任意の $u,v,x \in \mathcal{H}$ に対して，$A(u \otimes v)$ の $\{w_j \mid j \in J\}$ による展開を用いて $(B.19)$ 式，$(B.20)$ 式の順に写像 $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (u,x,v) \mapsto a(u,x,v) \in \mathcal{H}$ を定義する．

$$A(u \otimes v) = \sum_{j \in J} w_j \otimes a(u, w_j, v), \tag{B.19}$$

$$a(u,x,v) = \sum_{j \in J} \langle x | w_j \rangle \cdot a(u, w_j, v). \tag{B.20}$$

そして，任意の $u,v \in \mathcal{H}$ に対して，$A(u,v)x := a(u,v,x)$ $(x \in \mathcal{H})$ と定義すると，

$$\|A(u,v)\| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \quad u,v \in \mathcal{H}. \tag{B.21}$$

任意の $A \in \boldsymbol{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ が性質 A を持つとは，補題 14 で定義された $A(u,v)$（$u,v \in \mathcal{H}$）が次の性質を満たすことである：

性質 A 0 でない任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $\{W(x,u)v \in \mathcal{H} \mid u,v \in \mathcal{H}\}$ は $\mathcal{H}$ を張る．

この性質を満たす $A \in \boldsymbol{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ から局所コンパクト群が定義される：

命題 15. $\mathcal{H}$ を *Hilbert* 空間とする．性質 A を持つ $A \in \boldsymbol{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ に対して定まる作用素の族

$$\Gamma := \{U \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \mid U \neq 0, A(U \otimes U) = (1 \otimes U)A\} \tag{B.22}$$

は以下の性質を持つ：
(a) $\Gamma \subset \boldsymbol{U}(\mathcal{H})$ であって，Γ は作用素の積と弱位相で局所コンパクト群になる．この局所コンパクト群 Γ を A に付随した群と呼ぶ；
(b) $\{F \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \mid A(F \otimes 1) = (F \otimes 1)A\} \subset \Gamma'$.

次が求める K-T 作用素を特徴づける定理である．

定理 16. $\mathcal{H}$ を *Hilbert*空間とする．以下の条件および性質 A を満たす $W \in \boldsymbol{U}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$ に付随した群 Γ をとると，$\mathcal{H} \cong L^2(\Gamma)$ であって，W は Γ 上の K-T 作用素に対応する：
(a) $W_{23}W_{13}W_{12} = W_{12}W_{23}$ を満たす；
(b) $\mathcal{M} := \{M \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \mid W(1\otimes M) = (1\otimes M)W\}$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の極大可換代数である．

つまり，性質 A を満たし，定理 16 中の (a) および (b) を満たすユニタリー作用素 W はある局所コンパクト群 Γ の K-T 作用素であって，$\mathcal{M} \cong L^\infty(\Gamma)$ を満たす．また，K-T 作用素に対して命題 15 を然るべき状況（“ 弱再表現 (weak birepresentation) ”）において適用することで元の局所コンパクト群の再構成が可能となる（辰馬双対定理）．辰馬双対定理については本稿では議論しないが，Fourier-Pontryagin 双対定理について紹介する（3 章の繰り返し）．

定理 17 (Fourier-Pontryagin 双対定理)**.** 局所コンパクト可換群 G の任意の元 g に対して，$\tilde{g}(\gamma) = \gamma(g)$ $(\gamma \in \widehat{G})$ で定義される G の $\hat{\hat{G}}$ への埋め込み写像 $\tilde{\cdot} : G \mapsto \hat{\hat{G}}$ は G と $\hat{\hat{G}}$ の間の同相写像である：

$$G \simeq \hat{\hat{G}}.$$

つまり，局所コンパクト可換群 G の双対群の双対群 $\hat{\hat{G}}$ を考えるとそれは G 自身に他ならないのである．この定理が群とその表現の間の双対定理を解明する契機となった．

局所コンパクト可換群 G 上で Fourier 変換を定式化する．$\mathbb{R}$ の場合でほとんどその本質は尽きているのだが，$\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ となる特殊事情とは無縁である．例えばトーラス $\mathbb{T}$ のとき，その双対群 $\widehat{\mathbb{T}}$ は加法群 $\mathbb{Z}$ となる．$dg, d\gamma$ をそれぞれ G および $\widehat{G}$ の Haar 測度，p, q は $1/p + 1/q = 1$ を満たす正数として，Fourier および逆 Fourier 変換は

$$(\mathcal{F}f)(\gamma) := \int_G dg\, \overline{\gamma(g)} f(g), \quad (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(g) := \int_{\widehat{G}} d\gamma\, \gamma(g)\varphi(\gamma) \tag{B.23}$$

で与えられる．G および $\widehat{G}$ 上の関数空間は Fourier 変換によって次の関係で結ばれる：

$$\mathcal{F}L^p(G, dg) = L^q(\widehat{G}, d\gamma),$$

$\widehat{G}$ の Fourier 変換 $\widehat{\mathcal{F}} : L^q(\widehat{G}) \to L^p(\hat{\hat{G}})$ が Fourier 逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ と同一のものであることが Fourier-Pontryagin 双対定理から了解される．さらに，Stone の定理の一般化にあたる次の事実が成り立つ：

定理 18 (SNAG 定理 [134])**.** 局所コンパクト可換群 G の任意のユニタリー表現 $\{\mathcal{H}, U_g\}$ は $\widehat{G}$ 上で定義された $U(G)''$ の *PVM* E_U によって，

$$U_g = \int_{\widehat{G}} \overline{\gamma(g)}\, dE_U(\gamma)$$

とスペクトル分解される．

今度はコンパクト群の議論を行おう．局所コンパクト群がコンパクト群であるためには正則表現が単位表現 $\mathbf{1}$ を離散直和成分として含むことが必要十分であることが知られている．このような特殊性は規格化可能な両側不変測度が存在することに由来している．加えて，コンパクト群の正則表現は全ての既約ユニタリー表現 $\omega = (U, \mathcal{H})$ のその次元に等しい重複度の離散直和とユニタリー同値である．この結果と Stone-Weierstrass の定理から得られるのが Peter-Weyl の定理であって，この定理は局所コンパクト可換群上の Fourier 変換に相当するコンパクト群上の連続関数の展開公式である．

定理 19 (Peter-Weyl の定理)**.** コンパクト群 G 上の任意の連続関数は既約ユニタリー表現の行列要素線型結合により一様に近似される．すなわち，任意の $f \in C(G)$ と $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ と $\{a_{j,k_j,k'_j}\}_{k_j,k'_j=1,2,\cdots,M_j} \subset \mathbb{C}$，$G$ の既約ユニタリー表現 $\omega_j = (U_j, \mathcal{H}_j)$，$\{u_{jk_j}\}_{k_j=1,2,\cdots,M_j}$，$\{v_{jk'_j}\}_{k'_j=1,2,\cdots,M_j} \subset \mathcal{H}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, N)$ が存在して次を満たす：

$$\left| f(g) - \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_j,k'_j=1}^{M_j} a_{j,k_j,k'_j} \langle u_{jk_j} | U_j(g) v_{jk'_j} \rangle \right| < \varepsilon, \quad g \in G. \tag{B.24}$$

ただし，$i \neq j$ ならば ω_i と ω_j はユニタリー同値でないとする．この評価から次が成り立つ：

$$L^2(G) = \bigoplus_{(\gamma,\mathcal{H}_\gamma)\in\widehat{G}} \mathcal{H}_\gamma \otimes \mathcal{H}_\gamma^*. \tag{B.25}$$

定理 19 の中にあるユニタリー表現を用いて $\langle u_{jk_j} | U_j(g) v_{jk'_j} \rangle$ のかたちに書かれる連続関数を行列要素と呼ぶ．$\sum_{k_j,k'_j=1}^{M_j} a_j \langle u_{jk_j} | U_j(g) v_{jk'_j} \rangle$ $(j = 1, 2, \cdots, N)$ が局所コンパクト可換群での Fourier 変換での Fourier 成分に対応している．コンパクト可換群であるトーラス $\mathbb{T}$ の場合はこれは Fourier 級数展開に他ならない．

上での連続関数の行列要素による近似の議論を利用して Krein の意味での淡中-Krein 双対定理を説明する．$Rep_f(G)$ で G の有限次元ユニタリー表現の全体を表す．$Rep_f(G)$ を用いて構成される行列要素の全体 $\mathfrak{F}_G$ は関数としての和・積・対合（共役）演算で閉じた可換 *-代数となる：

$$\mathfrak{F}_G = \{f_{u,v}^\omega(g) := \langle u | U_g v \rangle \mid \omega = (U_g, \mathcal{H}) \in Rep_f(G),\ u, v \in \mathcal{H}\}. \tag{B.26}$$

任意の $g \in G$ に対して，写像 $\varphi_g : \mathfrak{F}_G \ni f_{u,v}^\omega \mapsto f_{u,v}^\omega(g) \in \mathbb{C}$ を定義すると，これは *-準同型写像である．すなわち，$\varphi_g \in {}^*\text{-Hom}(\mathfrak{F}_G, \mathbb{C})$ である．故に，${}^*\text{-Hom}(\mathfrak{F}_G, \mathbb{C})$ に対して適切な積構造の導入が可能であり，その積に関して群となる．この積構造の導入には定義域にあたる $\mathfrak{F}_G$ 上に定義される自然な (可換)Hopf 代数構造が本質的な役割を果たす．加えて，適切に位相構造を導入することで淡中-Krein 双対定理が成り立つ．

定理 20 (淡中-Krein 双対定理). G をコンパクト群とする．*-Hom$(\mathfrak{F}_G, \mathbb{C})$ に位相群の構造をいれてできるコンパクト群 $\hat{\hat{G}}$ と G とは $G \ni g \mapsto \varphi_g \in \hat{\hat{G}}$ の対応により同型である．

この定理は淡中-Krein 双対定理の一形態であり，Fourier 変換および Peter-Weyl の定理の観点と合致している点は了解していただけることだろう．群双対性を考えるにあたり，群上の余代数・Hopf 代数や加群が関与する良い一例である（[JS91] とこの中の参考文献参照）．この定式化の延長上にある Kac 代数による定式化では局所コンパクト群をも視野に入れることが可能である [30].

Fourier 変換および Peter-Weyl の定理は群上の関数の“ 基本単位 ”への分解理論である．今度は，ある意味でこれらの結果を包含する正定値関数の積分分解について議論しよう．ただし，直和の“ 連続化 ”にあたる直積分の考察を省くため，作用素環論的観点に関する説明は少々不正確となる．それでも，これから行う議論と冨田分解定理を比較することで得られるものは多くあることであろう．局所コンパクト群 G 上の正定値関数全体を $\mathbb{P}(G)$，局所コンパクト群 G 上の正定値関数 φ であって $\varphi(e) = 1$ を満たすもの全体を $\mathbb{P}_1(G)$ で表す．$\mathbb{P}(G)$ は凸アファイン空間であり，$\mathbb{P}_1(G)$ はそのアファイン部分空間である．任意の $\varphi \in \mathbb{P}(G)$ に対して，次式を満たす正値 Borel 測度 ν が存在し，

$$\varphi(g) = \int_{\mathbb{P}_1(G)} d\nu(\sigma)\ \sigma(g), \quad g \in G, \tag{B.27}$$

この測度 ν を φ の分解測度と呼ぶ．C*-代数上の状態の場合と同様に，$\mathbb{P}_1(G)$ の端点に伴う GNS 表現は G の既約ユニタリー表現を与える．$\mathbb{P}_1(G)$ の端点集合 $ex(\mathbb{P}_1(G))$ に台を持つ φ の分解測度を φ の端点測度と呼ぶ．一般に端点測度は正定値関数 φ を与えるごとに一意であるとは限らない．端点測度が一意であるような正定値関数 φ とは，φ に伴う GNS 表現 $(U_g, \mathcal{H})$ をとったとき，$U(G)'$ が可換 von Neumann 代数となるものである．一般の局所コンパクト群 G の正定値関数は端点集合 $ex(\mathbb{P}_1(G))$ の元の正の数倍でない限り端点測度は一意ではないが，任意の正定値関数の端点測度が一意であるような局所コンパクト群 G がある．そのような局所コンパクト群 G は I 型群と呼ばれており，任意のユニタリー表現 $(U_g, \mathcal{H})$ から生成される von Neumann 代数 $U(G)''$ が I 型，すなわち，$U(G)''$ がある Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ 上の有界作用素全体 $\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ と同型な局所コンパクト群である．I 型群の典型が局所コンパクト可換群とコンパクト群で，Fourier 変換と Peter-Weyl の定理は I 型群ゆえに示された結果と言える．くどいのを承知で再度強調するが，一般の局所コンパクト群においてはその上の正定値関数の端点分解は一意ではなく，Fourier 変換から導かれる諸結果と Peter-Weyl の定理も成り立たない．けれども，Peter-Weyl の定理において各 Fourier 成分は一項からなるとは限らず，既約表現を単位にした時必ず不定性が残る．この不定性は既出の因子表現を表現の基本単位に据える場合には一切存在せず，

Fourier 成分＝因子表現の“ 準同値類 ”

として C*-代数でのセクター理論と全く同様に議論が展開される．局所コンパクト群 G 上の任意の正定値関数 φ には無数の分解測度が存在するが，それらは φ に伴う GNS 表現 $(U_g, \mathcal{H})$ から生成される von Neumann 代数 $U(G)'$ の可換部分代数とそれぞれ対応する．特に，Fourier 成分への分解は $U(G)'$ の中心 $U(G)'' \cap U(G)'$ に対応した分解測度（これも中心測度と呼ぶ）によって与えられる．正定値関数限定という制約を受けるがこれも立派な Fourier 解析の一種である．

B.2.2　誘導表現

局所コンパクト群 G とその閉部分群 H をとり，H のユニタリー表現 $\omega = (V_h, \mathcal{H})$ が与えられているとする．G 上の $\mathcal{H}$ に値をとる強可測関数 $\xi(g)$ で $\xi(gh) = V_{h^{-1}}\xi(g)$ となるものを G 上の ω に関するベクトル断面という．また，G 上の $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に値をとる強可測関数 $\xi(g)$ で $W(gh) = V_{h^{-1}}W(g)$ となるものを ω に関する (ω-) 作用素断面という．任意の H のユニタリー表現 $\omega = (V_h, \mathcal{H})$ に対し，G 上の ω に関する $\boldsymbol{U}(\mathcal{H})$ に値をとる作用素断面が存在する．

G を局所コンパクト群，H を G の閉部分群として，$X = G/H$ と定める．以下の記述において概念の同一視が多用されている．注意して読んで頂きたい．

命題 21. (1) $C_c(G)$ および $C_c(X)$ にコンパクト集合上一様連続の位相を入れる．このとき，$f \in C_c(G)$ に対し

$$\int_H d_H h\ f(gh) = \varphi(\dot{g}) \tag{B.28}$$

で定められる写像 $f \mapsto \varphi$ は $C_c(G)$ から $C_c(X)$ の上への連続な正線型写像である．ただし，G/H の元を $\dot{g} = gH$ と表す．
(2) H の任意の正実表現 δ に対して，G 上の正の連続関数で $\psi(gh) = \delta(h)\psi(g)$ となる ψ が存在する．特に，G が Lie 群のとき $\psi \in C^\infty(G)$ にとれる．

定理 22. 前命題から，$\psi(gh) = \dfrac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)}\psi(g)$ となる ψ をとる．このとき，任意の $\varphi \in C_c(X)$ で式 $(B.28)$ が成り立つ $f \in C_c(G)$ に対し

$$I(\varphi) = \int d_G g\ f(g)\psi(g) \tag{B.29}$$

は式 $(B.28)$ を満たす f のとり方に依らず一意に定まる $C_c^+(X)$ 上の非負値加法関数である．それ故，X 上の正則 $Borel$ 測度 τ で次を満たすものが存在する：
(i) τ は G-準不変測度であって，$\dfrac{d_{g'}\tau}{d\tau}(\dot{g}) = \varrho(g', \dot{g}) = \dfrac{\psi(g'g)}{\psi(g)}$.

(ii) 任意の $f \in C_c(G)$ に対して，$\widetilde{f}(g) = \psi(g)^{-1} \int_H d_H h\ f(gh)(\Delta_H(h)/\Delta_G(h))$ は X 上の関数で，

$$\begin{aligned}\int_G d_G g\ f(g) &= \int_X d\tau(\dot{g})\ \widetilde{f}(g) \\ &= \int_X d\tau(\dot{g})\ \psi(g)^{-1} \left\{ \int_H d_H h\ f(gh) \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} \right\} \end{aligned} \tag{B.30}$$

を満たす．

G を局所コンパクト群，H を G の閉部分群として，$X = G/H$ 上の準不変測度 μ を命題 21. (2) 中の ψ から構成する．ψ は連続なので，$\varrho(g,x) = \dfrac{d_g\mu}{d\mu}(x) = \dfrac{\psi(gg')}{\psi(g')}(>0)$ $(x = \dot{g'} = g'H \in G/H)$ は $(g,x) \in G \times G/H$ 上の連続関数である．H のユニタリー表現 $\omega = (V_h, \mathcal{H})$ が与えられているとき，次の条件を満たす $\mathcal{H}$ に値をとる G 上の関数 F 全体のなす線型空間 $C(\mathcal{H})$ を定義する：

(1) F は G 上の $\mathcal{H}$ 値強連続関数である，

(2) 任意の $g \in G$ と $h \in H$ に対し，$F(gh) = V_{h^{-1}}F(g)$,

(3) $\|F\| = \left(\int_X d\mu(\dot{g})\ \|F(g)\|^2_{\mathcal{H}} \right)^{1/2} < \infty$.

このノルム $\|\cdot\|$ は $C(\mathcal{H})$ 上のノルムであり，このノルムにより定められる内積をもつ前 Hilbert 空間である $C(\mathcal{H})$ を（このノルムで）完備化して得られる Hilbert 空間を $\widetilde{\mathcal{H}}$ とする．$C(\mathcal{H})$ 上で，任意の $g \in G$, $f \in C(\mathcal{H})$ に対して，

$$(U_g f)(g') = \varrho(g, \dot{g'})^{1/2} f(g^{-1}g'), \quad g' \in G \tag{B.31}$$

によって定義される等長作用素 U_g を $\widetilde{\mathcal{H}}$ 上に拡張する (拡張は一意に存在)．このとき，U_g は $\widetilde{\mathcal{H}}$ 上のユニタリー作用素であり，G から $\boldsymbol{U}(\widetilde{\mathcal{H}})$ への強連続な準同型である．したがって，次の定理が成立する．

定理 23 (**誘導表現** (induced representation))**.** 局所コンパクト群 G の閉部分群 H のユニタリー表現 $\omega = (V_h, \mathcal{H})$ から構成された G の表現 $(\tilde{\mathcal{H}}, U_g)$ を H の表現 $\omega = (V_h, \mathcal{H})$ から誘導された G の表現と呼び，$\mathrm{Ind}_H^G \omega$ と表す．$\mathrm{Ind}_H^G \omega$ は同値の意味で準不変測度 μ のとり方に依らない．

定理 24 (階段定理)**.** G を局所コンパクト群，H を G の閉部分群，そして，K を H の閉部分群とし，K のユニタリー表現 ω があたえられているとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Ind}_K^H \omega) \cong \mathrm{Ind}_K^G \omega. \tag{B.32}$$

命題 25. 局所コンパクト群 G_i $(i = 1, 2)$ の閉部分群 H_i のユニタリー表現 ω_i が与えられているとき，次が成立する：

$$\mathrm{Ind}_{H_1}^{G_1} \omega_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Ind}_{H_2}^{G_2} \omega_2 \cong \mathrm{Ind}_{H_1 \times H_2}^{G_1 \times G_2} (\omega_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} \omega_2). \tag{B.33}$$

定理 26 (Frobenius の相反定理)**.** コンパクト群 G の閉部分群 H と G の既約ユニタリー表現 ω と H の既約ユニタリー表現 σ に対して,

$$[\mathrm{Ind}_H^G\sigma : \omega] = [\omega|_H : \sigma] \tag{B.34}$$

が成り立つ.

対称性の破れ，augmented algebra の議論には上で展開したような誘導表現とそれに纏わる諸結果が使われる．そのようなテーマとのかかわりで群表現・調和解析の諸概念がどのように機能するかに興味があれば，[108] の付録を参照して頂きたい.

引用文献

[**TH06**] 寺田 至，原田 耕一郎，群論，岩波書店，2006.

[**Yamasaki78**] 山崎 泰郎，無限次元空間の測度 上，下，紀伊国屋書店数学叢書，1978.

[**Kawazoe00**] 河添 健，群上の調和解析，朝倉書店, 2000.

[**JS91**] Andre Joyal, A., and Street, R., An introduction to Tannaka duality and quantum groups; in *Category Theory*, Lec. Notes Math. **1488** (1991), pp 413-492.

[**Guichardet61**] Guichardet, A., *Symmetric Hilbert spaces and related topics : infinitely divisible positive definite functions, continuous products and tensor products, Gaussian and Poissonian stochastic processes*, Lect. Notes Math. **261**, Springer, 1972.

[**PS72**] Parthasarathy, K.R., and Schmidt, K., *Positive Definite Kernels, Continuous Tensor Products, and Central Limit Theorems of Probability Theory*, Lect. Notes Math. **272**, Springer, 1972.

[**PCR84**] Berg, C., Christensen, J.P.R. and Ressel, P., *Harmonic analysis on semigroups : theory of positive definite and related functions*, Springer, 1984.

[**Okamoto80**] 岡本 清郷，等質空間上の解析学：リー群論的方法による序説，紀伊国屋書店, 1980.

[**KO05**] 小林 俊行, 大島 利雄，リー群と表現論，岩波書店, 2005.

[**Mackey68**] Mackey, G.W., *Induced representations of groups and quantum mechanics*, W.A. Benjamin, 1968.

[**Mackey76**] Mackey, G.W., *The theory of unitary group representations*, Univ. Chicago Press, 1976.

[**Helgason10**] Helgason, S., *Integral geometry and radon transforms*, Springer, 2010.

[**TH00**] 谷崎 俊之, 堀田 良之, D加群と代数群，シュプリンガー・フェアラーク東京, 2000；Hotta, R., Takeuchi, K., and Tanisaki, T., *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, Bärkhauser, 2008.

[**Tanisaki02**] 谷崎俊之，リー代数と量子群，共立出版, 2002.

[**Satake02**] 佐武一郎，リー環の話，新版，日本評論社, 2002.