幾何学から物理学へ

物理を圏論・微分幾何の言葉で語ろう

ウェブ別録

谷村 省吾

臨時別冊・数理科学　SGC ライブラリ 150（サイエンス社）

補足解説

初版　2019 年 6 月 20 日

まえがき

本文書は『幾何学から物理学へ—物理を圏論・微分幾何の言葉で語ろう』（臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 150，サイエンス社）に対する付録であり，補足解説である．ただ，本体冊子から離れたウェブサイト上に置かれるので，「ウェブ別録」と称することにする．内容は漸次更新増補していく予定である．

ここに書いてあることは，主に計算や証明である．書いている本人は，どういう道筋で計算・証明しようと考えるのは楽しいし，思ったような答えがぴたりと出て来たときは気分がよい．また，話の順序はこれでよいか，論理飛躍がありはしないかといったことを気にかけながら書くので，計算や証明を書くのは意外に時間がかかる．しかし，書き終わった文章を読んでみると，我ながらあまり面白いとは思えない．「ああ，きちんと答えが出てよかった，うまく行っていてよかった」と思うだけである．むしろ概念の定義や，そのような概念を導入する動機，新しい概念を導入することによってどういう視界が開けてくるかといったことを書くほうが，すらすら書けるし，自分では面白い文章になっている気がする．そういった意味で，ここに書いてあるようなことは別録にするのがふさわしいと思う．

谷村 省吾

目　次

付録 A

時間の三角不等式の証明

ミンコフスキー空間は，時間的・空間的・光的というベクトルの分類ができるという特徴を持つ．任意の時間的ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して正の実数 $\|\boldsymbol{v}\|_\eta$ を (11.19) で定めた．$\|\boldsymbol{v}\|_\eta$ はローレンツ変換で不変な量であり，ベクトルの固有長さ（固有時間）とも呼ばれる．任意の 2 つの未来向き時間的ベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ に対して (11.22) で示した不等式

$$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|_\eta \;\geq\; \|\boldsymbol{v}\|_\eta + \|\boldsymbol{w}\|_\eta \tag{A.1}$$

が成立する．これを**時間の三角不等式**と呼んだ．この式は，空間的ベクトルが満たす三角不等式に似ているが，不等号の向きが通常の三角不等式とは逆向きである．この不等式を以下の手順に従って証明しよう．

A.1 未来向き時間的ベクトルの内積不等式

(11.13) で開未来錐 V_+ を定めた．集合 V_+ の元を**未来向き時間的ベクトル**と呼ぶことにする．

定理 A.1　任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V_+$ について

$$\eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) > 0, \tag{A.2}$$

$$\{\eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\}^2 \geq \eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\cdot \eta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) \tag{A.3}$$

が成立する．とくに不等式 (A.3) は，ユークリッド計量で成立するコーシー・シュワルツの不等式 (10.36)，$\{g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\}^2 \leq g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\cdot g(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$ の不等号の向きを逆転させたものになっている．

証明　ミンコフスキー計量 η を持つ n 次元空間 V においてローレンツ枠 $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-1})$ を定めると，任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ を $\boldsymbol{v} = \sum_{\mu=0}^{n-1} v^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ と表示できる．いま，$\boldsymbol{v} \in V_+$ であることは，(11.13) の条件式

$$\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (v^0)^2 - \sum_{i=1}^{n-1}(v^i)^2 > 0, \tag{A.4}$$

$$\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_0) = v^0 > 0 \tag{A.5}$$

に他ならない．ベクトルの空間成分に関しては通常のコーシー・シュワルツの不等式

$$\Big(\sum_{i=1}^{n-1}(v^i)^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(w^j)^2\Big) > \Big(\sum_{i=1}^{n-1}v^i w^i\Big)^2 \tag{A.6}$$

が成立する．ゆえに $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V_+$ に対して

$$\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = v^0w^0 - \sum_{i=1}^{n-1}v^iw^i \ \geq\ v^0w^0 - \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(v^i)^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1}(w^j)^2} \tag{A.7}$$

であり，(A.4) より

$$v^0 > \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(v^i)^2}, \qquad w^0 > \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1}(w^j)^2}, \tag{A.8}$$

なので

$$\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) > 0 \tag{A.9}$$

となって (A.2) が示せた．また，いま $\boldsymbol{v}\in V_+$ なので，

$$\boldsymbol{e}_0 = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}} \tag{A.10}$$

とおいて，これに直交するベクトルを補ってローレンツ枠 $(\boldsymbol{e}_0,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1})$ を構成できる．この枠では，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の空間成分 v^i はゼロである．ゆえに

$$\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = v^0w^0 \geq v^0\sqrt{(w^0)^2 - \sum_{j=1}^{n-1}(w^j)^2} = \sqrt{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}\cdot\sqrt{\eta(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})}$$

であり，(A.3) が示せた．いま特殊なローレンツ枠を用いたが，両辺はローレンツ不変量なので，この関係式は枠の選び方に依らず成り立つ．

A.2　未来向き時間的ベクトルの和は未来向き時間的である

定理 A.2　$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V_+$ ならば任意の正の実数 λ に対して $\lambda\boldsymbol{v}\in V_+$ かつ $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\in V_+$ である．

証明　$\boldsymbol{v}\in V_+$ かつ $\lambda>0$ ならば $\lambda\boldsymbol{v}\in V_+$ であることは自明．

仮定より $v^0, w^0 > 0$ なので，$v^0+w^0>0$ であり，$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ も未来向きの条件

(A.5) を満たす．さらに (A.2) と (A.4) から

$$\eta(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + \eta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) + 2\eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) > 0 \tag{A.11}$$

なので，$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ も時間的ベクトルの条件 (A.4) を満たす．以上より $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \in V_+$ である．

A.3　時間の三角不等式

定理 A.3　任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V_+$ に対して

$$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|_\eta \ \geq \ \|\boldsymbol{v}\|_\eta + \|\boldsymbol{w}\|_\eta \tag{A.12}$$

が成立する．

証明　(A.11) と (A.3) より

$$\begin{aligned} \eta(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \ &= \ \eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + \eta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) + 2\eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ &\geq \ \eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + \eta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) + 2\sqrt{\eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} \cdot \sqrt{\eta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})} \end{aligned} \tag{A.13}$$

を得る．つまり，

$$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|_\eta^2 \ \geq \ \|\boldsymbol{v}\|_\eta^2 + \|\boldsymbol{w}\|_\eta^2 + 2\|\boldsymbol{v}\|_\eta \cdot \|\boldsymbol{w}\|_\eta = \Big(\|\boldsymbol{v}\|_\eta + \|\boldsymbol{w}\|_\eta\Big)^2 \tag{A.14}$$

であり，(A.12) が示せた．

A.4　内積不等式の別証明

ユークリッド空間におけるコーシー・シュワルツの不等式 (10.36) は，何通りかの証明が知られているが，その証明を参考にしてミンコフスキー時空における時間的ベクトルの内積不等式 (A.3) の別証明を見い出すことができる．A.1 節で示した証明は特殊なローレンツ枠を使っていたが，ここではローレンツ枠に頼らずに幾何学的な証明を与えよう．

定理 A.4　任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V_+$ について

$$\{\eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\}^2 \geq \eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \cdot \eta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) \tag{A.15}$$

が成立する．

証明　$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V_+$ と実数 s によって

$$\boldsymbol{w}_s := s\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \tag{A.16}$$

とおく．s を十分大きくとれば $\boldsymbol{w}_s \in V_+$ である．また，$s<0$ として $|s|$ を十分大きくとれば $\boldsymbol{w}_s \in V_-$ である．$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が一次従属ならば，$\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{0}$ となるような実数 s が存在する．$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が一次独立ならば，$\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{0}$ となるような実数 s は存在しない．$\overline{V}_+ \cap \overline{V}_- = \{\boldsymbol{0}\}$ かつ $(\overline{V}_+ \cup \overline{V}_-)^c = S$（$\overline{X}$ は集合 X の閉包，X^c は集合 X の補集合，S は空間的ベクトル全体の集合）であるから，変数 s を全実数にわたって動かすと，$\boldsymbol{w}_s$ は $\boldsymbol{0}$ になるか S の元になることがある．

$$\begin{aligned} f(s) &:= \eta(\boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{w}_s) \\ &= \eta(s\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, s\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \\ &= t^2\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) + 2s\,\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + \eta(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}) \end{aligned} \tag{A.17}$$

とおくと，t^2 の係数は $\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) > 0$ である．上の考察から $\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{w}_s \in S$ になるような s が存在するので，$f(s) \leq 0$ となるような s が存在する．従って，$f(s)=0$ は実根を持つ．書くまでもないことだが，$f(s)=0$ の根は

$$s_{\mathrm{root}} = \frac{-\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \pm \sqrt{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})^2 - \eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\,\eta(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})}}{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})} \ < \ 0 \tag{A.18}$$

である．実根の存在条件は判別式

$$\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})^2 - \eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\,\eta(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}) \geq 0 \tag{A.19}$$

で与えられ，これは (A.15) に他ならない．等号が成立するのは，$f(s)=0$ が重根を持つときであり，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が一次従属なときに限られる．

ついでに，2 次関数 $f(s)$ の最小値は 0 または負だということがわかった．$f(s)$ を s について微分して最小点を求める方程式を書くと

$$\frac{df}{ds} = 2s\,\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) + 2\,\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = 0 \tag{A.20}$$

であり，これから最小点

$$s_{\min} = -\frac{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})} \ < \ 0 \tag{A.21}$$

が求められる．このとき $f(s_{\min}) \leq 0$ であり，(A.21) を (A.17) に代入すれば，

$$f(s_{\min}) = -\frac{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})^2}{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})} + \eta(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}) \leq 0 \tag{A.22}$$

となり，再び (A.15) を得る．

ベクトル $\boldsymbol{w}_s$ は恣意的に導入されたように見えるが，$f(s) = \eta(\boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{w}_s)$ が最小値をとるときの $\boldsymbol{w}_s$ は明確な幾何学的意味を持っている．$\boldsymbol{w}_s$ の定義式 (A.16) は (A.21) に対して

$$\boldsymbol{w} \ = \ \boldsymbol{w}_s - s\boldsymbol{v}$$

$$= \left(\boldsymbol{w} - \frac{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}\right) + \frac{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v} \ = \ \boldsymbol{w}_{\text{space}} + \boldsymbol{w}_{\text{time}} \tag{A.23}$$

と書き換えられる．ここで

$$\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{w} - \frac{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_{\text{space}}, \qquad \frac{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_{\text{time}} \tag{A.24}$$

とおいた．$s_{\min}$ において $f(s) = \eta(\boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{w}_s) \leq 0$ なので $\boldsymbol{w}_{\text{space}}$ は空間的ベクトルである．また，$\boldsymbol{w}_{\text{time}}$ は未来向き時間的ベクトルである．しかも $\eta(\boldsymbol{w}_{\text{space}}, \boldsymbol{w}_{\text{time}}) = 0$ である．従って，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_{\text{space}} + \boldsymbol{w}_{\text{time}}$ はベクトル $\boldsymbol{w}$ をミンコフスキー計量に関して直交分解している．この分解式の各成分は次のように解釈される．$\boldsymbol{w}$ に沿って進む物体を $\boldsymbol{v}$ に沿って進む観測者（慣性系）から見たとき，$\boldsymbol{w}$ の始点から終点まで物体が移動するのに要する時間を観測者の時計で計ると経過時間は $\boldsymbol{w}_{\text{time}}$ に等しい．また，$\boldsymbol{w}$ の始点から終点まで物体が移動したときの空間的変位を観測者のものさしで計ると変位は $\boldsymbol{w}_{\text{space}}$ に等しい．

$\boldsymbol{v}$ 方向の規格化されたベクトル

$$\boldsymbol{e}_v := \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}} \tag{A.25}$$

を導入すると，(A.15) は

$$\{\eta(\boldsymbol{e}_v, \boldsymbol{w})\}^2 \ \geq \ \eta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) \tag{A.26}$$

と書き換えられ，$\boldsymbol{w}$ に沿って進む物体を $\boldsymbol{v}$ に沿って進む観測者（慣性系）から見たとき，左辺は $\boldsymbol{w}$ の始点から終点まで物体が移動するのに要する時間を観測者の時計で計った経過時間の 2 乗になっている．右辺は物体の固有の経過時間の 2 乗になっている．従って (A.26) は「物体の自己申告による時間は，他の慣性系の時計で計られる時間よりも必ず短い」という，「高速で動く時計の遅れ」（高速で動く粒子の寿命の延び）現象を表している．

付録 B

配位空間の対称性と運動量写像

このノートは,『幾何学から物理学へ』の『第 19 章：リー群・リー代数と力学系の対称性』に対する補足解説である．とくに 19.6 節，(19.39)–(19.45) で式の羅列だけで済ませた部分を詳しく説明する．

B.1　余接ベクトル束上のシンプレクティック構造

18.3 節 (18.8) の復習から始める．n 次元多様体 Q の点 q は質点系の配置などを表しているとし，Q を**配位空間** (configuration space) と呼ぶ．点 $q \in Q$ の座標を $(q^1, \cdots, q^n)$ とする．接ベクトル束 TQ と余接ベクトル束 T^*Q の定義は 12.4 節を参照．余接ベクトル束 $M = T^*Q$ の元 $x \in T_q^*Q$ を $x = \sum_{i=1}^n p_i \, dq^i$ と書くと，$(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ は x の座標になる．さらに $T(T^*Q)$ の元は

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^n \left(v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + u_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad \in T_x(T^*Q) \tag{B.1}$$

と書ける．可換図式

$$\begin{tikzcd} TM = T(T^*Q) \arrow[r, "\pi_p"] \arrow[d, "\pi_q = \pi_*"'] & M = T^*Q \arrow[d, "\pi"] \\ TQ \arrow[r] & Q \end{tikzcd} \tag{B.2}$$

を見ながら考えてほしいが，射影 $\pi : T^*Q \to Q$ は $x \in T_q^*Q$ を $\pi(x) = q \in Q$ に移す．その微分 $\pi_* = \pi_q : T(T^*Q) \to TQ$ は $\boldsymbol{X} \in T_x(T^*Q)$ を

$$\pi_q(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \quad \in T_qQ \tag{B.3}$$

に移す．一方で接ベクトル束の射影 $\pi_p : T(T^*Q) \to T^*Q$ は $\boldsymbol{X} \in T_x(T^*Q)$ を

$$\pi_p(\boldsymbol{X}) = x = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dq^i \quad \in T_q^* Q \tag{B.4}$$

に移す．これらのペアリング

$$\theta(\boldsymbol{X}) := \langle \pi_p(\boldsymbol{X}), \pi_q(\boldsymbol{X}) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} p_i\, dq^i, \sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial}{\partial q^j} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i v^i \tag{B.5}$$

により写像 $\theta : T(T^*Q) \to \mathbb{R}$ が定まる．これは $\boldsymbol{X} \in TM$ の成分 v^i の線形関数になっているので，θ は $M = T^*Q$ 上の 1 形式である．これは本文の (19.44) 式

$$\theta \;:\; T(T^*Q) \xrightarrow{\pi_p \oplus \pi_q} T^*Q \oplus TQ \xrightarrow{\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle} \mathbb{R} \tag{B.6}$$

を詳しく書いたものになっている．見方を替えると，

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dq^i \tag{B.7}$$

は, 各 p_i が $(q^1, \cdots, q^n)$ の関数であれば, Q 上の 1 形式なのだが, $(p_1, \cdots, p_n)$ を独立変数とみなすことによって θ は $M = T^*Q$ 上の 1 形式に格上げされている．この θ を T^*Q 上の正準 1 形式という．このとき

$$\omega := d\theta = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i \tag{B.8}$$

が閉かつ非退化な 2 形式であることは明らかであり，ω は T^*Q 上のシンプレクティック形式になっている．$(q^1, \cdots, q^n)$ の座標領域は Q の全域を覆っていないかもしれないが，写像 π_q, π_p は座標によらない概念であり，1 形式としての θ および 2 形式としての ω は T^*Q の全域で定義されている．

B.2　記法

以下では，さまざまな集合の元が登場するので，整理しておく：実数変数 $s, t, u \in \mathbb{R}$．リー群の元 $a, g \in G$．リー代数の元 $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} \in \mathfrak{g}$．配位空間の点 $q \in Q$．配位空間の接ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}_Q \in T_q Q$．配位空間の余接ベクトル $x \in T_q^* Q$．余接ベクトル束 $T^*Q = M$．M の接ベクトル $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{h}_M \in T_x M$.

B.3　配位空間上の群作用

リー群 G が多様体 Q に作用しているとは，(i) 微分可能写像

$$\mu : G \times Q \to Q, \qquad (g, q) \mapsto \mu(g, q) = gq \tag{B.9}$$

があり，(ii) 任意の $g_1, g_2 \in G$ と任意の点 $q \in Q$ に対して $g_2(g_1 q) = (g_2 g_1) q$,

(iii) 単位元 $e \in G$ と任意の点 $q \in Q$ に対して $eq = q$ が成り立っていることである．ただし，群作用を表す写像 μ をいちいち書かずに，$\mu(g, q) = gq$ と書いて済ませることが多い．また，群の元 $a \in G$ による作用 $q \mapsto aq$ のことを写像 $a = \mu(a, \bullet) : Q \to Q$ とも書く．

一般に，群 G が作用している多様体 Q_1, Q_2 と写像 $\varphi : Q_1 \to Q_2$ があって，任意の $a \in G$ と任意の $q_1 \in Q_1$ に対して

$$\varphi(aq_1) = a\varphi(q_1) \tag{B.10}$$

が成り立っていれば，すなわち，

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & Q_2 \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & Q_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} q_1 & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & \varphi(q_1) \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ aq_1 & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(aq_1) = a\varphi(q_1) \end{array} \tag{B.11}$$

が可換図式になっていれば，$\varphi : Q_1 \to Q_2$ は ***G*-同変** (equivariant) であるという．G-同変写像は，じつは圏論で言うところの自然変換でもある．

リー群 G が多様体 Q に作用しているとき，$\mathrm{AD}_a : G \to G,\ g \mapsto \mathrm{AD}_a(g) = aga^{-1}$ と $a : Q \to Q,\ q \mapsto aq$ に関して可換図式

$$\begin{array}{ccc} G \times Q & \xrightarrow{\mu} & Q \\ {\scriptstyle (\mathrm{AD}_a,\ a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ G \times Q & \xrightarrow{\mu} & Q \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (g, q) & \xrightarrow{\qquad\mu\qquad} & gq \\ {\scriptstyle (\mathrm{AD}_a,\ a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ (aga^{-1}, aq) & \xrightarrow{\mu} & (aga^{-1})\cdot(aq) = a(gq) \end{array} \tag{B.12}$$

が成立する．従って，群作用を表す写像 $\mu : G \times Q \to Q$ は同変的である．

B.4　群作用から派生する写像

G 上の曲線，すなわち微分可能写像 $\mathbb{R} \to G,\ s \mapsto g(s)$ が，$g(0) = e$ を満たすとする．このとき任意の点 $q \in Q$ に対して $q(s) = g(s)q$ は $q(0) = q$ を通る Q 上の曲線を定める．曲線 $g(s), q(s)$ の $s = 0$ における接ベクトルをそれぞれ

$$\boldsymbol{k} := \left.\frac{dg}{ds}\right|_{s=0} \in T_eG \cong \mathfrak{g}, \tag{B.13}$$

$$\boldsymbol{k}q = \boldsymbol{k}_Q(q) := \left.\frac{d}{ds}g(s)q\right|_{s=0} \in T_qQ \tag{B.14}$$

とおくことにより写像

$$\mathfrak{g} \times Q \to TQ, \qquad (\boldsymbol{k}, q) \mapsto \boldsymbol{k}q \tag{B.15}$$

が定まるが，これは $\boldsymbol{k} \in \mathfrak{g}$ に関して線形である．また，$\boldsymbol{k}_Q : Q \to TQ$ は Q 上のベクトル場になる．$\boldsymbol{k}_Q$ をリー代数の元 $\boldsymbol{k} \in \mathfrak{g}$ が Q 上に起こす**無限小変換**

(infinitesimal transformation) ともいう．

また，Q 上の任意の曲線，すなわち微分可能写像 $\mathbb{R} \to Q$, $t \mapsto q(t)$ に対して

$$\boldsymbol{v} := \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} \in T_q Q, \tag{B.16}$$

$$a_* \boldsymbol{v} := \left.\frac{d}{dt} aq(t)\right|_{t=0} \in T_{aq} Q \tag{B.17}$$

とおくことにより接ベクトルの移動

$$G \times TQ \to TQ, \qquad (a, \boldsymbol{v}) \mapsto a_* \boldsymbol{v} \tag{B.18}$$

が定まる．いちいち区別しなくてもわかる場面では $a_* \boldsymbol{v}$ のことを $a\boldsymbol{v}$ と書くこともある．

$\mathrm{Ad}_a : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $\boldsymbol{k} \mapsto \mathrm{Ad}_a(\boldsymbol{k}) = a\boldsymbol{k}a^{-1}$ に関して，同変性を表す可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \times Q \arrow[r] \arrow[d, "{(\mathrm{Ad}_a,\ a)}"'] & TQ \arrow[d, "a_*"'] \\ \mathfrak{g} \times Q \arrow[r] & TQ \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\boldsymbol{k}, q) \arrow[r] \arrow[d, "{(\mathrm{Ad}_a,\ a)}"'] & \boldsymbol{k}q \arrow[d, "a_*"'] \\ (a\boldsymbol{k}a^{-1}, aq) \arrow[r] & (a\boldsymbol{k}a^{-1})\cdot(aq) = a_*(\boldsymbol{k}q) \end{tikzcd} \tag{B.19}$$

および

$$\begin{tikzcd} G \times TQ \arrow[r] \arrow[d, "{(\mathrm{AD}_a,\ a_*)}"'] & TQ \arrow[d, "a_*"'] \\ G \times TQ \arrow[r] & TQ \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g, \boldsymbol{v}) \arrow[r] \arrow[d, "{(\mathrm{AD}_a,\ a_*)}"'] & g_*\boldsymbol{v} \arrow[d, "a_*"'] \\ (aga^{-1}, a_*\boldsymbol{v}) \arrow[r] & (aga^{-1})\cdot(a_*\boldsymbol{v}) = a_*(g_*\boldsymbol{v}) \end{tikzcd} \tag{B.20}$$

が成立する．

$a \in G$ の TQ 上の作用 (B.18)，すなわち

$$a_* : T_q Q \to T_{aq} Q, \qquad \boldsymbol{v} \mapsto a_* \boldsymbol{v} \tag{B.21}$$

の双対は

$$a^* : T^*_{aq} Q \to T^*_q Q, \qquad x \mapsto a^* x := x \circ a_* \tag{B.22}$$

である．$x \in T^*_{aq} Q$ と $\boldsymbol{v} \in T_q Q$ のペアリングは

$$\langle a^* x, \boldsymbol{v} \rangle = \langle x, a_* \boldsymbol{v} \rangle \tag{B.23}$$

を満たす．射影 $T_q Q \to \{q\}$，$T^*_q Q \to \{q\}$ に関して

$$\begin{tikzcd} TQ \arrow[r] \arrow[d, "a_*"'] & Q \arrow[d, "a"'] & T^*Q \arrow[l] \\ TQ \arrow[r] & Q & T^*Q \arrow[l] \arrow[u, "a^*"'] \end{tikzcd} \tag{B.24}$$

が可換図式になっている．ただ，このままだと $a, b \in G$ に対して $(ab)^* x =$

b^*a^*x となって，G の作用が反変的になるので，$\tau_a(x) := (a^*)^{-1}x$ とおいて

$$\begin{aligned} G \times T^*Q &\xrightarrow{\tau} T^*Q, \\ (a, x) &\mapsto \tau_a x = (a^*)^{-1}x = (a^{-1})^*x = x \circ (a^{-1})_* \end{aligned} \tag{B.25}$$

を定める．こうすると $\tau_a : T_q^*Q \to T_{aq}^*Q$ であり，$\tau_{ab}(x) = (\tau_a\tau_b)(x)$ が成り立つ．雑に $\tau_a x = xa^{-1}$ と書くこともある．これについても同変性の可換図式

$$\begin{tikzcd} G \times T^*Q \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "(\mathrm{AD}_a,\ \tau_a)"'] & T^*Q \arrow[d, "\tau_a"'] \\ G \times T^*Q \arrow[r, "\tau"] & T^*Q \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g, x) \arrow[r] \arrow[d, "(\mathrm{AD}_a,\ \tau_a)"'] & \tau_g x = xg^{-1} \arrow[d, "\tau_a"'] \\ (aga^{-1}, xa^{-1}) \arrow[r] & (xa^{-1})(aga^{-1})^{-1} = xg^{-1}a^{-1} \end{tikzcd} \tag{B.26}$$

が成立する．

(B.25) の群作用 $G \times T^*Q \to T^*Q$ から 2 通りの微分 $G \times T(T^*Q) \to T(T^*Q)$ と $\mathfrak{g} \times T^*Q \to T(T^*Q)$ を誘導することができる．写像 $\tau_a : T^*Q \to T^*Q,\ x \mapsto \tau_a(x)$ の微分は各 x ごとに写像 $(\tau_a)_* : T_x(T^*Q) \to T_{\tau_a x}(T^*Q)$ を定める．これらを点 $x \in T^*Q$ についてまとめて

$$(\tau_a)_* : T(T^*Q) \to T(T^*Q) \tag{B.27}$$

と書く．群作用のつねとして，同変性の可換図式

$$\begin{tikzcd} G \times T(T^*Q) \arrow[r, "\tau_*"] \arrow[d, "(\mathrm{AD}_a,\ \tau_{a*})"'] & T(T^*Q) \arrow[d, "\tau_{a*}"'] \\ G \times T(T^*Q) \arrow[r, "\tau_*"] & T(T^*Q) \end{tikzcd} \tag{B.28}$$

が成立する．

一点 $x \in T^*Q$ と $a(0) = e$ を通る G 上の曲線 $a(s)$ が与えられると，(B.25) の群作用 $\tau : G \times T^*Q \to T^*Q$ により，T^*Q の曲線 $x(s) = \tau_{a(s)}x$ とその接ベクトルが誘導される：

$$\boldsymbol{h} := \left.\frac{da}{ds}\right|_{s=0} \in T_eG \cong \mathfrak{g}, \tag{B.29}$$

$$\boldsymbol{h}x = \boldsymbol{h}_M(x) := \left.\frac{d}{ds}\tau_{a(s)}x\right|_{s=0} \in T_xM = T_x(T^*Q). \tag{B.30}$$

こうして写像

$$\mathfrak{g} \times T^*Q \to T(T^*Q), \qquad (\boldsymbol{h}, x) \mapsto \boldsymbol{h}x \tag{B.31}$$

を定める．これは $\boldsymbol{h} \in \mathfrak{g}$ に関して線形である．また，$\boldsymbol{h}_M : M \to TM$ は M 上のベクトル場になる．ここでも同変性の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \times T^*Q \arrow[r] \arrow[d, "(\mathrm{Ad}_a,\,\tau_a)"'] & T(T^*Q) \arrow[d, "(\tau_a)_*"'] \\
\mathfrak{g} \times T^*Q \arrow[r] & T(T^*Q)
\end{tikzcd}
\tag{B.32}
$$

が成立する．

B.5　余接ベクトル束上の運動量写像

正準 1 形式 $\theta : T(T^*Q) \to \mathbb{R}$, (B.6) に群作用を施すとどうなるか見てみよう．写像 $\tau_a : T^*Q \to T^*Q$ の微分は $(\tau_a)_* : T_x(T^*Q) \to T_{\tau_a x}(T^*Q)$ を定める．$\boldsymbol{X} \in T_x(T^*Q)$ に対して $\pi_p(\boldsymbol{X}) = x \in T_q^*Q$ かつ $\pi_q(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{v} \in T_qQ$ とすると，$\tau_{a*}\boldsymbol{X} \in T_{\tau_a x}(T^*Q)$ の射影は $\pi_p(\tau_{a*}\boldsymbol{X}) = \tau_a x = (a^{-1})^* x \in T_{aq}^*Q$ および $\pi_q(\tau_{a*}\boldsymbol{X}) = a_*\boldsymbol{v} \in T_{aq}Q$ となる．これらのペアリングの値は

$$
\begin{aligned}
\theta_{ax}\left(\tau_{a*}\boldsymbol{X}\right) &= \langle \pi_p(\tau_{a*}\boldsymbol{X}),\, \pi_q(\tau_{a*}\boldsymbol{X}) \rangle \\
&= \langle (a^{-1})^* x,\, a_*\boldsymbol{v} \rangle \\
&= \langle x,\, (a^{-1})_*\, a_*\, \boldsymbol{v} \rangle \\
&= \langle x, \boldsymbol{v} \rangle \\
&= \theta_x\left(\boldsymbol{X}\right)
\end{aligned}
\tag{B.33}
$$

となる．同じことを図式で書くと，可換図式

$$
\begin{tikzcd}
T(T^*Q) \arrow[r, "\pi_p \oplus \pi_q"] \arrow[d, "(\tau_a)_*"'] & T^*Q \oplus TQ \arrow[r, "\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle"] \arrow[d, "(a^{-1})^* \oplus a_*"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\
T(T^*Q) \arrow[r, "\pi_p \oplus \pi_q"] & T^*Q \oplus TQ \arrow[r, "\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
\tag{B.34}
$$

となる．以上で，θ の不変性

$$
\begin{tikzcd}
T(T^*Q) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "(\tau_a)_*"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\
T(T^*Q) \arrow[r, "\theta"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
\tag{B.35}
$$

が示された．よって，配位空間の余接ベクトル束上の正準 1 形式 θ は，任意の $a \in G$ に対して $\tau_a^*\theta = \theta \circ (\tau_a)_* = \theta$ を満たす．$\tau_a^*\omega = \tau_a^* d\theta = d\tau_a^*\theta = d\theta = \omega$ なので，$\tau_a : M \to M$ はシンプレクティック変換になっている．

写像 (B.31) と (B.6) の合成写像

$$
\begin{array}{rcccl}
J : \mathfrak{g} \times T^*Q & \to & T(T^*Q) & \to & \mathbb{R} \\
(\boldsymbol{h}, x) & \mapsto & \boldsymbol{h}_M(x) & \mapsto & J_h(x) := \theta(\boldsymbol{h}_M(x)) = \langle x, \boldsymbol{h}_Q(q) \rangle
\end{array}
\tag{B.36}
$$

で**運動量写像** J を定める．可換図式 (B.32) と (B.35) の合成により

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \times T^*Q \arrow[r] \arrow[d, "(\mathrm{Ad}_a,\ \tau_a)"'] & T(T^*Q) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "(\tau_a)_*"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\ \mathfrak{g} \times T^*Q \arrow[r] & T(T^*Q) \arrow[r, "\theta"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \tag{B.37}$$

を得る．これは

$$J_{aha^{-1}}(\tau_a x) = J_h(x) \tag{B.38}$$

を意味する．$a\boldsymbol{h}a^{-1}$ を改めて $\boldsymbol{h}$ とし，$J_h(\tau_a x) = (\tau_a^* J_h)(x)$ と書くと，上式は

$$(\tau_a^* J_h)(x) = J_{a^{-1}ha}(x) \tag{B.39}$$

となる．これは，示したかった運動量写像の同変性 (19.38) に他ならない．$\tau_a = (a^*)^{-1}$ であることに注意すると (B.37) は

$$\begin{tikzcd} T^*Q \arrow[r, "J"] & \mathfrak{g}^* \\ T^*Q \arrow[r, "J"] \arrow[u, "a^*"] & \mathfrak{g}^* \arrow[u, "\mathrm{Ad}_a^*"'] \end{tikzcd} \tag{B.40}$$

とも書ける．

以上より，**配位空間上の群作用は，相空間のシンプレクティック変換になり，必ず運動量写像を伴う**ことがわかった．一般には，相空間上の群作用は，必ずしもシンプレクティック変換ではないし，シンプレクティック変換だったとしても運動量写像が存在するとは限らない（条件 (19.31) と (19.38) を満たさなければならない）．

なお，運動量写像は，つねに保存量とは限らない．その時間変化はハミルトン方程式

$$\frac{d}{dt}J_h(\gamma(t)) = \{J_h, H\}_{\mathrm{P}} = -\boldsymbol{X}_{J_h}H = -\boldsymbol{h}_M H = -\mathscr{L}_{h_M}H \tag{B.41}$$

を満たすので，ベクトル場 $\boldsymbol{h}_M$ が生成するフローの下でハミルトニアンが不変であることが，J_h が保存量であるための必要十分条件である．

B.6 ネーターチャージ

T^*Q の点は $x = \sum_{i=1}^n p_i\, dq^i$ と座標表示されていた．リー代数の元 $\boldsymbol{h} \in \mathfrak{g}$ が Q 上に起こすベクトル場 $\boldsymbol{h}_Q$ を

$$\boldsymbol{h}_Q(q) = \sum_{i=1}^n h_Q^i(q)\, \frac{\partial}{\partial q^i} \tag{B.42}$$

と座標表示すると，(B.36) に定めた運動量写像は

$$J_h(x) := \langle x, \boldsymbol{h}_Q(q)\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i\, h_Q^i(q) \tag{B.43}$$

で表される，$(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ の関数である．

ラグランジュ力学系からハミルトン力学系に移るときは，ルジャンドル変換

$$p_i = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^i} \tag{B.44}$$

で運動量変数 $\boldsymbol{p}$ と速度変数 $\dot{\boldsymbol{q}}$ とを関係づける．パラメータ s を持つ変換 $q(s) = \exp(s\boldsymbol{h})q$ の無限小変換のベクトル場の成分を

$$h_Q^i = \delta q^i = \left.\frac{\partial q^i}{\partial s}\right|_{s=0} \tag{B.45}$$

と書けば，運動量写像 (B.43) は

$$J_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\, \delta q^i \tag{B.46}$$

となり，ネーターの保存量（ネーターチャージ）になる．

B.7　運動量写像の例：平行移動と運動量

$Q = \mathbb{R}^2$ の座標を $q = (q^1, q^2)$ とする．Q には加法群 $G = \mathbb{R}^2$ が平行移動として作用する：

$$G \times Q \to Q, \qquad (a, q) = \left(\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} \right) \mapsto aq = \begin{pmatrix} q^1 + a^1 \\ q^2 + a^2 \end{pmatrix}. \tag{B.47}$$

この変換の下で $d(q^1 + a^1) = dq^1$, $d(q^2 + a^2) = dq^2$ は不変なので，$\theta = p_1 dq^1 + p_2 dq^2$ も不変．この変換の下で座標値 p_1, p_2 は不変なので，$a \in G$ の作用を T^*Q に拡張すると

$$G \times T^*Q \to T^*Q, \qquad (a, x) = \left(\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \tau_a x = \begin{pmatrix} q^1 + a^1 \\ q^2 + a^2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \tag{B.48}$$

となる．とくに s を助変数とする，ベクトル $\boldsymbol{h} = (h^1, h^2)$ 方向の平行移動の族

$$a(s) = s \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix}, \qquad a(s) \cdot \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^1 + sh^1 \\ q^2 + sh^2 \end{pmatrix} \tag{B.49}$$

は Q 上にベクトル場

$$\boldsymbol{h}_Q = \left.\frac{\partial\, a(s)q^1}{\partial s} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial\, a(s)q^2}{\partial s} \frac{\partial}{\partial q^2}\right|_{s=0} = h^1 \frac{\partial}{\partial q^1} + h^2 \frac{\partial}{\partial q^2} \tag{B.50}$$

を起こす．これに伴う運動量写像 (B.43) は

$$J_h = \left\langle p_1 dq^1 + p_2 dq^2, \boldsymbol{h}_Q \right\rangle = p_1 h^1 + p_2 h^2 \tag{B.51}$$

となる．とくに $(h^1, h^2) = (1, 0)$ を選べば $J_h = p_1$ であり，$(h^1, h^2) = (0, 1)$ を選べば $J_h = p_2$ である．つまり，配位空間の平行移動変換 (B.47) に伴う運動量写像 (B.51) は，通常の「運動量」である．

B.8 運動量写像の例：回転と角運動量

$Q = \mathbb{R}^2$ には直交変換群 $G = SO(2)$ が回転として作用する：

$$G \times Q \to Q, \qquad (g, q) = \left(\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} \right) \mapsto gq. \tag{B.52}$$

引き戻しにより T^*Q の成分は

$$g^*(p_1, p_2) = (p_1, p_2) \circ g = (p_1, p_2) \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \tag{B.53}$$

に変換する．従って，(B.25) に定めた T^*Q の共変的変換は

$$\tau_g(p_1, p_2) = (p_1, p_2) \circ g^{-1} = (p_1, p_2) \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}^{-1} \tag{B.54}$$

となるが，直交行列の逆行列は転置行列と一致するので，結局 τ_g の T^*Q 上の作用は

$$\tau_g x = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & 0 & \sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \tag{B.55}$$

と書ける．この変換の下で $\theta = p_1 dx + p_2 dy$ は不変．直交群の作用 (B.52) は

$$g(u)q^1 = q^1 \cos u - q^2 \sin u, \tag{B.56}$$

$$g(u)q^2 = q^1 \sin u + q^2 \cos u \tag{B.57}$$

と書けて，助変数 u に関する微分は

$$\frac{\partial\, g(u)q^1}{\partial u} = -q^1 \sin u - q^2 \cos u, \tag{B.58}$$

$$\frac{\partial\, g(u)q^2}{\partial u} = q^1 \cos u - q^2 \sin u \tag{B.59}$$

となるので，$g(u)$ は Q 上にベクトル場

$$\boldsymbol{k}_Q = \frac{\partial\, g(u)q^1}{\partial u} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial\, g(u)q^2}{\partial u} \frac{\partial}{\partial q^2} \bigg|_{s=0} = -q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + q^1 \frac{\partial}{\partial q^2} \tag{B.60}$$

を起こす．これに伴う運動量写像 (B.43) は

$$J_k = \left\langle p_1 dq^1 + p_2 dq^2, \boldsymbol{k}_Q \right\rangle = -p_1 q^2 + p_2 q^1 = q^1 p_2 - q^2 p_1 \tag{B.61}$$

となる．$J_k = xp_y - yp_x$ という書き方のほうがなじみがあるだろうが，運動量写像 (B.61) は，通常の「角運動量」である．

B.9　配位空間の座標変換と余接ベクトル束の座標変換：極座標への変換

ついでながら，配位空間の座標変換と余接ベクトル束の座標変換がどう連動するか見ておこう．こういう計算をやってみると微分形式の扱いやすさを味わえると思われる．

$Q = \mathbb{R}^2$ の直交座標を $q = (x, y)$ とする．極座標 (r, ϕ) を

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi \tag{B.62}$$

で導入する．その微分は

$$dx = dr\cos\phi - r\,d\phi\,\sin\phi, \qquad dy = dr\sin\phi + r\,d\phi\,\cos\phi \tag{B.63}$$

となる．あるいは行列を使ってまとめ書きすると

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\phi \end{pmatrix} \tag{B.64}$$

となる．このとき余接ベクトルの元 $\theta = \sum_i p_i dq^i$ は不変でなくてはならないので（(B.4) では T^*Q の元を $x = \sum_i p_i dq^i$ と書いたが，ここでは (x, y) を Q の座標として使っているので，混同を避けるため T^*Q の元を θ と書く），

$$\theta = p_x dx + p_y dy = p_r dr + p_\phi d\phi = (p_x, p_y)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (p_r, p_\phi)\begin{pmatrix} dr \\ d\phi \end{pmatrix} \tag{B.65}$$

が成り立つように (p_x, p_y) の変換則が定まる：

$$(p_x, p_y)\begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} = (p_r, p_\phi). \tag{B.66}$$

つまり，運動量座標の変換則は

$$p_r = p_x\cos\phi + p_y\sin\phi = \frac{p_x x + p_y y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{B.67}$$

$$p_\phi = -p_x r\sin\phi + p_y r\cos\phi = -p_x y + p_y x \tag{B.68}$$

となる．この p_ϕ は角運動量 (B.61) と一致している．運動量変数の変換則は，(B.65) のような微分形式の不変性だけで決まることに注意してほしい．ラグ

ランジアンは関係式 (B.44) を通して速度変数 $\dot{q}^i$ と運動量変数 p_i を関係づけるが，**ハミルトン形式の力学では，運動量は独立変数であり，とくにラグランジアンを介さなくてもその変換性は定まる．**

B.10 重心・相対座標への変換

もう一つ，余接ベクトル θ の不変性から変数変換則が定まる例として，n 次元アフィン空間中の 2 つの質点の座標変換を見ておこう．$\boldsymbol{a} = (a^1, \cdots, a^n)$ と $\boldsymbol{b} = (b^1, \cdots, b^n) \in \mathbb{R}^n$ の内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^1 b^1 + \cdots + a^n b^n$ と書く．2 つの質点の位置を $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \in \mathbb{R}^n$ とすると，質点系の配位空間は $Q = \mathbb{R}^{2n}$ である．各質点の運動量を $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \mathbb{R}^n$ とする．

$$\boldsymbol{R} := \frac{m_1 \boldsymbol{q}_1 + m_2 \boldsymbol{q}_2}{m_1 + m_2}, \tag{B.69}$$

$$\boldsymbol{r} := \boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1 \tag{B.70}$$

により重心位置 $\boldsymbol{R}$ と相対位置 $\boldsymbol{r}$ を定める．このとき，これらの変数に共役な運動量変数 $\boldsymbol{p}_R$, $\boldsymbol{p}_r$ を求めよう．(B.65) と同様に，不変であるべき余接ベクトル

$$\begin{aligned} \theta &= \boldsymbol{p}_1 \cdot d\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{p}_2 \cdot d\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{p}_R \cdot d\boldsymbol{R} + \boldsymbol{p}_r \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \cdot \begin{pmatrix} d\boldsymbol{q}_1 \\ d\boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{p}_R, \boldsymbol{p}_r) \cdot \begin{pmatrix} d\boldsymbol{R} \\ d\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{B.71}$$

を書く．質量の和を $M := m_1 + m_2$ とおいて，(B.69), (B.70) の微分

$$\begin{pmatrix} d\boldsymbol{R} \\ d\boldsymbol{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\boldsymbol{q}_1 \\ d\boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix} \tag{B.72}$$

を (B.71) に入れれば，

$$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = (\boldsymbol{p}_R, \boldsymbol{p}_r) \begin{pmatrix} \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{B.73}$$

を得る．つまり，

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{m_1}{M} \boldsymbol{p}_R - \boldsymbol{p}_r, \tag{B.74}$$

$$\boldsymbol{p}_2 = \frac{m_2}{M} \boldsymbol{p}_R + \boldsymbol{p}_r \tag{B.75}$$

であり，すなわち，

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_R, \tag{B.76}$$

$$-m_2 \boldsymbol{p}_1 + m_1 \boldsymbol{p}_2 = M \boldsymbol{p}_r \tag{B.77}$$

でもある．これらが (B.69), (B.70) に伴う運動量変数の変換則である．これら

の変数を用いると，質点系の運動エネルギーは

$$K \;=\; \frac{1}{2m_1}\boldsymbol{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\boldsymbol{p}_2^2 \;=\; \frac{1}{2M}\boldsymbol{p}_R^2 + \frac{M}{2m_1m_2}\boldsymbol{p}_r^2 \tag{B.78}$$

のように書き換えられる．ベクトル $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ 方向の平行移動は $\boldsymbol{q}_1 \mapsto \boldsymbol{q}_1 + s\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{q}_2 \mapsto \boldsymbol{q}_2 + s\boldsymbol{h}$ あるいは $\boldsymbol{R} \mapsto \boldsymbol{R} + s\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{r} \mapsto \boldsymbol{r}$ のように作用する．この変換に対する運動量写像は (B.43), (B.71) より

$$J_h = \left\langle \theta, \boldsymbol{h}_Q \right\rangle \;=\; (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{h} \;=\; \boldsymbol{p}_R\cdot\boldsymbol{h} \tag{B.79}$$

となる．また，細かい説明は省くが，$\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ の無限小回転は，n 次反対称行列 $A \in \mathfrak{so}(n)$ $(A^\top = -A)$ によって

$$\boldsymbol{k}_Q = A\boldsymbol{q} \tag{B.80}$$

で与えられる．この変換に対する運動量写像は

$$J_k = \left\langle \theta, \boldsymbol{k}_Q \right\rangle \;=\; \boldsymbol{p}_1\!\cdot\! A\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{p}_2\!\cdot\! A\boldsymbol{q}_2 \;=\; \boldsymbol{p}_R\!\cdot\! A\boldsymbol{q}_R + \boldsymbol{p}_r\!\cdot\! A\boldsymbol{q}_r \tag{B.81}$$

となる．とくに $n=3$ の場合，3 次反対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \tag{B.82}$$

のように表記することができて，行列 A の作用は 3 次元ベクトル積を用いて $A\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{q}$ と書ける．これを用いると (B.81) は

$$\begin{aligned} J_k \;&=\; \boldsymbol{p}_1\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{q}_1) + \boldsymbol{p}_2\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{q}_2) \;=\; \boldsymbol{\varepsilon}\cdot(\boldsymbol{q}_1\times\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{q}_2\times\boldsymbol{p}_2) \\ &=\; \boldsymbol{p}_R\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{q}_R) + \boldsymbol{p}_r\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{q}_r) \;=\; \boldsymbol{\varepsilon}\cdot(\boldsymbol{q}_R\times\boldsymbol{p}_R + \boldsymbol{q}_r\times\boldsymbol{p}_r) \end{aligned} \tag{B.83}$$

となる．これは 3 次元空間中の角運動量の $\boldsymbol{\varepsilon}$ 方向成分に他ならない．

参考文献

[1] J.-M. Souriau, “Structure des systèmes dynamiques”, Dunod, 1970. “moment” という用語で運動量写像 (moment map) に相当する概念を定義している．C. H. Cushman-de Vries による英訳, “Structures of Dynamical Systems”, Birkhäuser, 1997 の p.101, Chapter II, Section 11, 命題 (11.7b) がそれ．フランス語で書かれた書物の全編がネットに公開されている：`http://www.jmsouriau.com` （2018 年 8 月 29 日閲覧）

[2] B. Kostant, “Quantization and unitary representations”, Lectures in Modern Analysis and Applications III, pp. 87–208, Springer, 1970. 群の表現についての論文だが，運動量写像にあたるものが書かれている．私の記法で書くと p. 176 の $\lambda : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ がそれ．論文[2], [3]のことは Twitter を通して Paul Painlevé@JPN さんにご教示いただいた.

[3] A. A. Kirillov, “Unitary representations of nilpotent Lie groups”, Russ. Math. Surv. **17**, 53–104 (1962). 群の表現についての論文．群作用の軌道と表現の関係が論じられている．

[4] V. I. アーノルド（安藤韶一, 蟹江幸博, 丹羽敏雄 訳）『古典力学の数学的方法』岩波書店, 1980. 付録 5「対称性をもつ力学系」で運動量写像を扱っている．短い記述ではあるが，p.378 の脚注が力学系の簡約の歴史について書かれている．

[5] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, “Introduction to Mechanics and Symmetry”, Springer, 2nd ed. 2003. 古典力学系の対称性を包括的に扱っている本．運動量写像を moment map と表記する流儀と momentum map と表記する流儀があるようだが，この著者は momentum map と書いている．量子力学系についても若干の解説あり．

[6] 大貫義郎『解析力学』岩波書店，1987. 簡潔にまとまっていて，随所に著者独自の視点が伺える，特徴ある本である．ネーターの定理を知らない読者には，この本で確認することをおすすめする．

[7] S. Tanimura and T. Iwai, “Reduction of quantum systems on Riemannian manifolds with symmetry and application to molecular mechanics”, Journal of Mathematical Physics **41**, 1814–1842 (2000). e-print archive: math-ph/9907005. この論文中の (5.8) 式で N 個の質点からなる系に対して重心運動と相対運動を分離するヤコビ・ベクトルを導入している．