付録B 問題解答

B.1 (1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=1\boldsymbol{a}+1\boldsymbol{a}=(1+1)\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}$.

(2) $0\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a}=(0+0)\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}$．両辺に $-(0\boldsymbol{a})$ を加えると $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(3) $(1+(-1))\boldsymbol{a}=1\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}$. ゆえに $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}$. (2) より $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ なので $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

(4) $\lambda(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0})=\lambda\boldsymbol{0}+\lambda\boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ なので $\lambda\boldsymbol{0}=\lambda\boldsymbol{0}+\lambda\boldsymbol{0}$. 両辺に $-(\lambda\boldsymbol{0})$ を加えて $\boldsymbol{0}=\lambda\boldsymbol{0}$.

B.2 ベクトル空間の公理 (P.177∼178) の V を n 次実正方行列全体の集合，$\boldsymbol{K}$ を $\boldsymbol{R}$ とする．また，V の任意の元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は任意の n 次実正方行列 A, B と読み替えればよい．n 次の零行列 O は，任意の行列 A に対して $A+O=A$ となるので，ベクトル空間では零ベクトルである．すると以下のようにすべての公理が成り立つ.

(i) $A+B=B+A$. (問題 1.5 (1))

(ii) $(A+B)+C=A+(B+C)$. (問題 1.5 (2))

(iii) $A+O=A$. (上記)

(iv) $A+B=O$ となる B は $B=-A$ であり確かに V 中に存在する.

(v) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$. (問題 1.5 (4))

(vi) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$. (問題 1.5 (5))

(vii) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$. (問題 1.5 (3))

(viii) $1A=A$. (明らか)

B.3 P_n の任意の元を $\boldsymbol{a}=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ などと表す．公理の (i), (ii) は明らか．また任意の $\boldsymbol{a}$ に対し $\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$ なので 0 が零ベクトル $\boldsymbol{0}$ である．また，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ となるような $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}=-a_0-a_1x-\cdots-a_nx^n$ であり，(iv) が成り立つ．(v)∼(viii) は明らか.

B.4 W は V の部分集合なので，公理の中で登場する等式の左右辺の演算結果が W に含まれることを確認すれば，等式が成立すること自体は自明である．W が部分空間であるための 2 つの条件をもう一度記す.

(ア) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in W$ ならば $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in W$,
(イ) $\lambda\in\boldsymbol{K}, \boldsymbol{a}\in W$ ならば $\lambda\boldsymbol{a}\in W$.

以下，公理 (i)∼(viii) についてひとつずつ確かめる.

(i) (ア) が成立するなら $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の順序を変えた $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\in W$ も当然成り立つ.

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\in W$ ならば，(ア) よりまず $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in W$ であり，さらに $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}\in W$ となる．$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\in W$ も同様.

(iii) (イ) について $\lambda=0$ を選ぶと $0\boldsymbol{a}\in W$ となる．$0\boldsymbol{a}$ は V の元 $\boldsymbol{0}$ に等しいので（問題 B.1 (2)），W の任意の元 $\boldsymbol{a}$ に対しても $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$ となる.

(iv) (イ) について $\lambda=-1$ を選ぶと $(-1)\boldsymbol{a}\in W$ となる．$(-1)\boldsymbol{a}$ は V の元 $-\boldsymbol{a}$ に等しいので（問題 B.1 (3)），$\boldsymbol{a}\in W$ なら $-\boldsymbol{a}\in W$ となる.

(v) $\lambda, \mu\in\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{a}\in W$ なら (イ) より $\lambda\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{a}\in W$ であり，(ア) より $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}\in W$．さらに $\lambda+\mu\in\boldsymbol{K}$ なので $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}\in W$.

(vi) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ なら (ア) より $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$．よって (イ) より $\lambda \in \boldsymbol{K}$ なら $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \in W$．また (イ) より $\lambda\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b} \in W$ なので (ア) より $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} \in W$．

(vii) $\lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$ なら $\lambda\mu \in \boldsymbol{K}$．よって $\boldsymbol{a} \in W$ なら $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} \in W$．また (イ) より $\mu\boldsymbol{a} \in W$ であり，さらに (イ) より $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) \in W$．

(viii) $1 \in \boldsymbol{K}$ であるので $\boldsymbol{a} \in W$ なら (イ) より $1\boldsymbol{a} \in W$．

B.5 $\{\mathbf{0}\}$ の任意の元は $\mathbf{0}$ しかない．また，$\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $(\mathbf{0}+\mathbf{0})+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $(\lambda+\mu)\mathbf{0}=\mathbf{0}$ 等，公理に現れる等式の左右辺の演算結果は常に $\mathbf{0}$ となり等式が成立する．よって $\{\mathbf{0}\}$ は部分空間である．

B.6 $P_1 \sim P_3$ が部分空間になることは明らか．P_0 すなわち定数だけの集合 $\{a_0;\, a_0 \in \boldsymbol{R}\}$ も部分空間になる．さらにたとえば P_4 の元のうち x の 1 次の項がないもの，すなわち $a_0+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ で表される元全体の集合も部分空間をなす．なぜなら，$\mathbf{0}=0$ はこのうちに含まれており，元同士の和やスカラー倍によっても 1 次の項が生まれないからである．

B.7 (1) S の任意の元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in S$, $\lambda\boldsymbol{a} \in S$ であり，零元 $\mathbf{0}$ が 0 であることも容易にわかる．公理のすべての条件が成立することは問題 B.3 の 1 変数の場合を参考にすればたやすいので省略する．

(2) $c_1(x^2-1)+c_2(x^2+xy)+c_3(xy+1)=0$ とする．x, y の同じ次数の項でまとめ直すと

$$(c_1+c_2)x^2+(c_2+c_3)xy+(-c_1+c_3)=0$$

となる．この等式が任意の x, y で成立するには，すべての係数が 0，すなわち

$$c_1+c_2=0, \qquad c_2+c_3=0, \qquad -c_1+c_3=0$$

が必要十分条件である．これより $c_1=c_3=-c_2$ が満たされればよいので，たとえば $(c_1,c_2,c_3)=(1,-1,1)$ でもよい．ゆえに線形従属である．

B.8 (1) 等式 $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=\mathbf{0}$ を考えると，基底の定義よりこの場合でも $c_1 \sim c_n$ が一意に存在する．明らかに $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ はこの等式を満たし，一意性より等式を満たすものはそれ以外に存在しない．よって $\boldsymbol{a}_1 \sim \boldsymbol{a}_n$ は線形独立である．

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ に対し

$$\boldsymbol{\alpha}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n \qquad ①$$

と表したとき，$c_1 \sim c_n$ が一意であることを示せばよい．今，同じ $\boldsymbol{\alpha}$ に対して

$$\boldsymbol{\alpha}=c_1'\boldsymbol{a}_1+c_2'\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n'\boldsymbol{a}_n \qquad ②$$

というように別の線形結合で表せたとする．ところが ① − ② より

$$(c_1-c_1')\boldsymbol{a}_1+(c_2-c_2')\boldsymbol{a}_2+\cdots+(c_n-c_n')\boldsymbol{a}_n=\mathbf{0}$$

となり，$\boldsymbol{a}_1 \sim \boldsymbol{a}_n$ が線形独立なので $c_1=c_1'$, $c_2=c_2'$, $\cdots$, $c_n=c_n'$ しかありえない．よって $c_1 \sim c_n$ は任意のベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ に対して一意に定まる．

B.9 $p(x) \sim p'''(x)$ は以下で与えられる．

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad p'(x) = 1 + 2x + 3x^2, \qquad p''(x) = 2 + 6x, \qquad p'''(x) = 6.$$

P_3 の任意の元を $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ と表すとき

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 &= c_0 p(x) + c_1 p'(x) + c_2 p''(x) + c_3 p'''(x) \\ &= (c_0 + c_1 + 2c_2 + 6c_3) + (c_0 + 2c_1 + 6c_2)x + (c_0 + 3c_1)x^2 + c_0 x^3 \end{aligned}$$

より

$$c_0 + c_1 + 2c_2 + 6c_3 = a_0, \qquad c_0 + 2c_1 + 6c_2 = a_1, \qquad c_0 + 3c_1 = a_2, \qquad c_0 = a_3$$

が得られる．これを $c_0 \sim c_3$ について解くと

$$\begin{aligned} &c_0 = a_3, \qquad c_1 = (a_2 - a_3)/3, \qquad c_2 = (3a_1 - 2a_2 - a_3)/18, \\ &c_3 = (9a_0 - 3a_1 - a_2 - 5a_3)/54 \end{aligned}$$

となり，$a_0 \sim a_3$ から $c_0 \sim c_3$ が一意的に定まる．よって $p(x) \sim p'''(x)$ は P_3 の基底である．

B.10

$$\begin{aligned} &a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + b_1 x + b_2 y + c \\ &\quad = c_1(x^2 - xy) + c_2(xy - y^2) + c_3(y^2 - x) + c_4(x - y) + c_5(y - 1) + c_6 \end{aligned}$$

とおく．両辺の同じべきの項を比較すると以下が得られる．

$$\begin{aligned} &a_1 = c_1, \qquad a_2 = c_2 - c_1, \qquad a_3 = c_3 - c_2, \\ &b_1 = c_4 - c_3, \qquad b_2 = c_5 - c_4, \qquad c = c_6 - c_5. \end{aligned}$$

これを $c_1 \sim c_6$ について解くと

$$\begin{aligned} &c_1 = a_1, \qquad c_2 = a_1 + a_2, \qquad c_3 = a_1 + a_2 + a_3, \qquad c_4 = a_1 + a_2 + a_3 + b_1, \\ &c_5 = a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2, \qquad c_6 = a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + c \end{aligned}$$

となり，a_i, b_i, c から $c_1 \sim c_6$ が一意に定まる．よって基底になる．

B.11 基底をなすベクトルの個数を数えればよい．
$\boldsymbol{R}^n$ の場合：第 i 成分が 1 で，それ以外の成分がすべて 0 のベクトルを $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して考える．任意の元はこれらの線形結合で一意に表せるので，これらが基底をなす．したがって $\boldsymbol{R}^n$ の次元は n．

P_n の場合：任意の元は $1, x, x^2, \cdots, x^n$ の線形結合で一意に表せるので，これらが基底をなす．したがって P_n の次元は $n+1$．

B.12 線形写像 $f : V \to W$ に対し，定義より $f(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda f(\boldsymbol{a})$ が成り立つ．$\lambda = 0$ のとき $f(0\boldsymbol{a}) = 0f(\boldsymbol{a})$．問題 B.1 (2) より $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \in V$, $0f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0} \in W$．よって $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$．また，$\lambda = -1$ のとき $f((-1)\boldsymbol{a}) = (-1)f(\boldsymbol{a})$．問題 B.1 (3) より $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$, $(-1)f(\boldsymbol{a}) = -f(\boldsymbol{a})$．よって $f(-\boldsymbol{a}) = -f(\boldsymbol{a})$．

B.13 線形写像の定義より

$$f(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r) = f(\lambda_1\boldsymbol{a}_1)+f(\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r) = \lambda_1 f(\boldsymbol{a}_1)+f(\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r).$$

同様に

$$f(\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r) = \lambda_2 f(\boldsymbol{a}_2)+f(\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r).$$

以下同様に展開すると，与式が成り立つことがわかる．

B.14 P_n の任意の元は $\boldsymbol{a} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ と表すことができる．f によって写像すると

$$f(\boldsymbol{a}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dx} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

となり，$f(\boldsymbol{a}) \in P_{n-1}$ となる．さらに，

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \frac{d(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{dx} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dx} + \frac{d\boldsymbol{b}}{dx} = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}),$$
$$f(\lambda\boldsymbol{a}) = \frac{d(\lambda\boldsymbol{a})}{dx} = \lambda\frac{d\boldsymbol{a}}{dx} = \lambda f(\boldsymbol{a})$$

が成り立つので，確かに f は P_n から P_{n-1} への線形写像である．

B.15 P.179 の部分空間の定義より，(i) $f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}) \in \operatorname{Im} f$ ならば $f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}) \in \operatorname{Im} f$，(ii) $\lambda \in \boldsymbol{K}$, $f(\boldsymbol{a}) \in \operatorname{Im} f$ ならば $\lambda f(\boldsymbol{a}) \in \operatorname{Im} f$ の 2 つが示されればよい．
(i) について：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ より，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$ となる．ゆえに $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \in \operatorname{Im} f$．さらに f は線形写像なので $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$．よって $f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}) \in \operatorname{Im} f$.
(ii) について：$\boldsymbol{a} \in V$ より $\lambda\boldsymbol{a} \in V$ となる．ゆえに $f(\lambda\boldsymbol{a}) \in \operatorname{Im} f$．さらに f は線形写像なので $f(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda f(\boldsymbol{a})$．よって $\lambda f(\boldsymbol{a}) \in \operatorname{Im} f$.

B.16 (1) $f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b})$ なら $f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ となる．そこで $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を求める．

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x+y \\ -x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

より s を任意定数として $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$．よって $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}$ となるような $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を求めればよい．たとえば $s = 1$ として，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(2) $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x+y \\ -x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ とおく．すると $p+q=r$ となるので $p+q \neq r$ ならばこの等式を満たす x, y, z は存在しない．たとえば $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{R}^3$ に含まれるが $\operatorname{Im} f$ には含まれない．したがって $\operatorname{Im} f \neq \boldsymbol{R}^3$.

(3) 任意の x, y, z に対して $x+y=p$, $-x+z=q$ とすると

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} p \\ q \\ p+q \end{bmatrix} = p\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}} + q\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}}$$

と表すことができる．これは $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の線形結合であり，$f(\boldsymbol{x})$ が定まれば p, q は一意に定まる．したがって $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ が $\mathrm{Im}\, f$ の基底であり，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ となる．

B.17 問題 B.7 の多項式に $y=1$ を代入すると

$$a_1x^2 + (a_2+b_1)x + (a_3+b_2+c)$$

となる．これは x の 2 次多項式である．さらに a_i, b_i, c を自由に与えて得られる多項式全体の集合は P_2 に等しい．従って問題 B.11 より $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$ である．

B.18 $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ ならば，f は線形写像なので $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$．よって $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathrm{Ker}\, f$ ならば $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in \mathrm{Ker}\, f$．また，$f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ すなわち $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}\, f$ ならば $f(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ なので $\lambda\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}\, f$．したがって $\mathrm{Ker}\, f$ は部分空間の定義を満たす．

B.19 問題 B.14：

$$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} = 0$$

より $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$．したがって $\mathrm{Ker}\, f = \{a_0;\ a_0$ は任意の実数$\} = P_0$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$.

問題 B.16：

$f(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たすのは $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$（問題 B.16 (1) 解答を参照）．したがって

$\mathrm{Ker}\, f = \left\{s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};\ s \text{ は任意の実数}\right\}$. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が $\mathrm{Ker}\, f$ の基底になるので $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$.

問題 B.17：

$y=1$ を代入して得られる多項式は

$$a_1x^2 + (a_2+b_1)x + (a_3+b_2+c).$$

この多項式が x によらず 0 となるのは

$$a_1 = a_2+b_1 = a_3+b_2+c = 0,$$

すなわち

$$a_1 = 0, \qquad b_1 = -a_2, \qquad c = -a_3-b_2.$$

これを S の元に代入すると $a_2(xy-x) + a_3(y^2-1) + b_2(y-1)$．ゆえに

$$\mathrm{Ker}\, f = \{a_2(xy-x) + a_3(y^2-1) + b_2(y-1);\ a_2, a_3, b_2 \text{ は任意の実数}\}.$$

明らかに $xy-x$, y^2-1, $y-1$ が $\mathrm{Ker}\, f$ の基底になるので $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3$.

B.20 問題 B.14：

$V = P_n$, $\dim V = n+1$. $\mathrm{Im}\, f = P_{n-1}$ なので $\dim(\mathrm{Im}\, f) = n$ であり，問題 B.19 より $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$．よって定理 B.2 が成立する．

問題 B.16：

$V = \boldsymbol{R}^3$, $\dim V = 3$. 問題 B.16 (3) より $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ であり，問題 B.19 より $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$．よって定理 B.2 が成立する．

問題 B.17：

$V = S$, $\dim V = 6$. 問題 B.17 より $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$ であり，問題 B.19 より $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3$. よって定理 B.2 が成立する．

B.21 $V = \boldsymbol{R}^4$, $\dim V = 4$. $\boldsymbol{R}^4$ の任意の元 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix}$ を f で写像する．

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+u \\ -(x+2y+u) \\ 2(x+2y+u) \end{bmatrix} = (x+2y+u) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

よって

$$\mathrm{Im}\, f = \{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} ; t \text{ は任意の実数 } \}$$

であり，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 1$.

一方，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ とおくと上式より $x+2y+u = 0$ となる．したがって $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ の一般形は $\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ -r-2s \end{bmatrix}$．ゆえに

$$\mathrm{Ker}\, f = \{ r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; r, s, t \text{ は任意の実数 } \}$$

であり，$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3$. ゆえに $\dim V = \dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 4$.

B.22 $V = P_n$, $\dim V = n+1$.

- $k \leqq n$ のとき：
  $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in P_n$ に対して

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \frac{d^k}{dx^k}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\ &= k! a_k + (k+1)! a_{k+1} x + \cdots + n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}. \end{aligned}$$

よって $\dim(\mathrm{Im}\, f) = n - k + 1$．$f(\boldsymbol{x}) = 0$ とおくと $a_k = a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$．ゆえに

$$\mathrm{Ker}\, f = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1};\ a_0 \sim a_{k-1}\text{は任意の実数}\}.$$

ゆえに $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = k$．よって定理 B.2 が成り立つ．

- $k > n$ のとき：
  $f(\boldsymbol{x}) = 0$．$\mathrm{Im}\, f = \{0\}$ なので $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 0$．また $\mathrm{Ker}\, f = V = P_n$ より $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = n + 1$．よって定理 B.2 が成り立つ．