

第 6 章 章末問題解答.

1 (i) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + x^{-2} - 2$ より

$$\begin{aligned}\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx &= \int x^2 dx + \int x^{-2} dx - 2 \int dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - 2x + C.\end{aligned}$$

(ii) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + x^{-1} + 2$ より $\frac{x^2}{2} + \log|x| + 2x + C$.

2. (i) $t = 2x - 1$ とおく. $x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ であり、 $dx = \frac{1}{2}dt$.

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x-1}dx &= \int \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)t^{1/2}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{4}\int(t^{3/2} + t^{1/2})dt \\ &= \frac{1}{10}t^{5/2} + \frac{1}{6}t^{3/2} + C = \frac{1}{10}(2x-1)^{5/2} + \frac{1}{6}(2x-2)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

(ii) $t = x + 2$ とおく。

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{\sqrt{x+2}}dx &= \int \frac{2t-4}{\sqrt{t}}dt = 2\int t^{1/2}dt - 4\int t^{-1/2}dt \\ &= \frac{4}{3}(x+2)^{3/2} - 8(x+2)^{1/2} + C.\end{aligned}$$

(iii) $t = e^x + 1$ とおくと $dt = e^x dx$.

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C = \log|e^x + 1| + C.$$

(iv) 例題 6.4 と同様にして

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\log |\cos x| + C.$$

3. (i) $u = x^2$, $v' = \sin x$ とおくと、 $u' = 2x$, $v = -\cos x$.

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx.$$

再び $u = 2x$, $v' = \cos x$ とおくと、 $u' = 2$, $v = \sin x$. よって

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

(ii) まず、置換 $t = x^2 + 1$ を行う。 $dt = 2x dx$ なので

$$\int x \log(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int \log t dt.$$

例題 6.13 の部分積分を行って

$$\int x \log(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2}(t \log t - t) + C = \frac{1}{2}\{(x^2 + 1) \log(x^2 + 1) - x^2 - 1\} + C.$$

または $u' = x$, $v = \log(x^2 + 1)$ とおいて

$$\frac{x^2}{2} \log(x^2 + 1) - \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} \log(x^2 + 1) - \int \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx.$$

最後の積分に置換積分 $t = x^2 + 1$ を施してもよいが、いずれにせよ置換

積分と部分積分を組み合わせることが必要になる。

4. (i) $\frac{1}{4x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right)$ より

$$\int \frac{1}{4x^2-1} dx = \frac{1}{4} \log |2x-1| - \frac{1}{4} \log |2x+1| + C = \frac{1}{4} \log \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| + C.$$

(ii)

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^3} = \frac{p}{x} + \frac{q_1}{x-1} + \frac{q_2}{(x-1)^2} + \frac{q_3}{(x-1)^3}$$

とおくことができる。分母を払って

$$x^2+1 = p(x-1)^3 + q_1x(x-1)^2 + q_2x(x-1) + q_3x.$$

$x=0$ を代入して, $p=-1$. $x=1$ を代入して $q_3=2$. 両辺を微分して

$$2x = -3(x-1)^2 + q_1(x-1)^2 + 2q_1x(x-1) + q_2(2x-1) + 2. \quad x=1 \text{ を代入}$$

して, $q_2=0$. もう一度微分して $2 = -6(x-1) + 2q_1(x-1) + 2q_1(2x-1)$.

$x=1$ を代入して $q_1=1$. よって

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3} dx &= -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx + 2 \int \frac{1}{(x-1)^3} dx \\ &= -\log |x| + \log |x-1| - \frac{1}{(x-1)^2} + C. \end{aligned}$$

(iii) $\frac{1}{x^3+1} = \frac{p}{x+1} + \frac{q_1x+q_2}{x^2-x+1}$ とおく。分母を払って、 $1 = p(x^2-x+1) +$

$(q_1x+q_2)(x+1)$. $x=-1$ を代入して $p=\frac{1}{3}$. さらに $x=0, 1$ を代入して

$\frac{1}{3} + q_2 = 1, q_1 + q_2 = \frac{1}{3}$. よって $q_2 = \frac{2}{3}, q_1 = -\frac{1}{3}$. したがって、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \log |x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx. \end{aligned}$$

2 番目の積分については例題 6.21 と同様に考える: $(x^2 - x + 1)' = 2x - 1$

なので $x - 2 = \frac{1}{2}(x^2 - x + 1)' - \frac{3}{2}$. よって

$$\frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{6} \int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx.$$

ここで第一の積分は例題 6.4 により $\frac{1}{6} \log |x^2 - x + 1|$. 第二の積分は例題

6.20 のようにして公式 (9) (p.124) も用いて、

$$\int \frac{1}{x^2-x+1} dx = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

したがって、

$$\int \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \log |x+1| - \frac{1}{6} \log |x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

(iv) p_1, p_2, q_1, q_2 をうまく選ぶとして

$$\frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)} = \frac{p_1x+p_2}{x^2+4} + \frac{q_1x+q_2}{x^2+9}$$

の形になる (p.140 参照). 恒等式の条件から p_1, p_2, q_1, q_2 についての連立

方程式を導いてそれを解いて p_1, p_2, q_1, q_2 を求めてもよいが、ここでは例

題 6.18 にならおう。分母を払って $1 = (p_1x+p_2)(x^2+9) + (q_1x+q_2)(x^2+4)$.

$x = 2i$ を代入して $2p_1i + p_2 = \frac{1}{5}$. p_1, p_2 は実数なので $p_1 = 0, p_2 = \frac{1}{5}$.

$x = 3i$ を代入して $3iq_1 + q_2 = -\frac{1}{5}$. よって $q_1 = 0, q_2 = -\frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)} dx &= \frac{1}{5} \int \frac{1}{x^2+4} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x^2+9} dx \\ &= \frac{1}{10} \arctan \frac{x}{2} - \frac{1}{15} \arctan \frac{x}{3} + C. \end{aligned}$$

ここで公式 (9) (p. 124) を用いた。

注意. 実は $X = x^2$ として $\frac{1}{(X+4)(X+9)}$ に対して部分積分を考えた方が見通しがよい。

(v)

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{c}{x-1} + \frac{p_1x+q_1}{x^2+1} + \frac{p_2x+q_2}{(x^2+1)^2}$$

とおいて分母を払う:

$$1 = c(x^2+1)^2 + (p_1x+q_1)(x-1)(x^2+1) + (p_2x+q_2)(x-1).$$

$x = 1$ を代入して $c = \frac{1}{4}$. $x = i$ を代入して $(i-1)(p_2i+q_2) = 1$, すなわ

ち $-(p_2+q_2) + (q_2-p_2)i = 1$. したがって、 $p_2 = -\frac{1}{2}, q_2 = -\frac{1}{2}$. 両辺を

微分して

$$\begin{aligned} 0 &= 2cx(x^2+1) + \{(p_1x+q_1)(x-1)\}'(x^2+1) + (p_1x+q_1)(x-1) \times 2x + \\ &\quad \{p_2(x-1) + (p_2x+q_2)\}. \end{aligned}$$

$x = i$ を代入して $0 = 2i(i-1)(p_1i+q_1) + p_2(i-1) + (p_2i+q_2)$. よって

$(2p_1-2q_1) - (2p_1+2q_1)i = i$. よって $p_1 - q_1 = 0, p_1 + q_1 = -\frac{1}{2}$. した

がって、 $p_1 = -\frac{1}{4}$, $q_1 = -\frac{1}{4}$. 以上をまとめて、

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{x+1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx.$$

2 番目の積分は例題 6.21 と同様にして

$$\int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \log |x^2+1| + \arctan x + C.$$

3 番目の積分は 6.5 節の (V) のパターンなので pp.146–147 の手順にし

たがって、

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

であって、

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{2} t^{-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1}$$

(置換 $t = x^2 + 1$ を行う)。一方、例題 6.22 の漸化式、特に I_2 の計算式

を用い、

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x.$$

以上をまとめて

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2} dx &= \frac{1}{4} \log |x-1| - \frac{1}{8} \log |x^2+1| \\ &- \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1-x}{4(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

5. (i) $t = \tan x$ とおく。例題 6.22 も用いて

$$\int \frac{1}{2 + \tan^2 x} dx = \int \frac{1}{(1 + t^2)(2 + t^2)} dt = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt - \int \frac{1}{t^2 + 2} dt.$$

ここでの部分分数分解は問題 4 の (iv) と同様にできる (または慣れてく

ればある程度見当をつけておいてあとでそれを確かめてもよい)。よって

公式 (9) (p.124) より

$$\int \frac{1}{2 + \tan^2 x} dx = \arctan t - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan x \right) + C.$$

注意. $t = \tan \frac{x}{2}$ とおいてもよいがより複雑になる。

(iii) $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくと

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

注意. 倍角公式より

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \int \frac{\left(\tan \frac{x}{2} \right)'}{\tan \frac{x}{2}} dx$$

なので例題 6.4 を用いてもよい。

(iii) $t = \tan \frac{x}{2}$ とおいて

$$\int \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} dx = 4 \int \frac{1}{(t^2 + 1)(t + 1)^2} dt.$$

部分分数分解を行う：

$$\frac{1}{(t^2 + 1)(t + 1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(t + 1)^2}.$$

よって

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} dx &= -\log |t^2 + 1| + 2 \log |t + 1| - \frac{2}{t + 1} + C \\ &= 2 \log \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}} \right| - \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + C. \end{aligned}$$

注意. 答えの第一項は $2 \log \left| \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right|$ と表してもよい。

6. (i) $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - x^2} dx &= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} + C \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x) + C. \end{aligned}$$

注意. ここで倍角公式、逆三角関数の定義と $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ を用い

ると $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}$ なので, 答えは

$$\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C$$

とも表示される。

(ii) $x = \sin t$ において

$$\int \frac{x^2}{(1 - x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt.$$

さらに 6.6 節の I にならって, $u = \tan t$ において

$$\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{u^2}{1 + u^2} du = \int \left(1 - \frac{1}{1 + u^2} \right) du$$

$$= u - \arctan u + C = \tan t - t + C.$$

よって

$$\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} dx = \tan(\arcsin x) - \arcsin x + C.$$

注意. 積分 $\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt$ において $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ なので $\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} dt =$

$\int \frac{1}{\cos^2 t} dt - \int dt$ と変形して $\int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t + C$ を用いてもよい。

(iii) $x = 3 \tan t$ とおくと $\sqrt{x^2 + 9} = \frac{3}{\cos t}$, $dx = \frac{3}{\cos^2 t} dt$ より

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x^2+4)\sqrt{x^2+9}} dx &= \int \frac{3 \sin t + \cos t}{9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} dt \\ &= 3 \int \frac{\sin t}{9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} dt + \int \frac{\cos t}{9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

第一の積分は $\int \frac{\sin t}{9(1-\cos^2 t)+4 \cos^2 t} dt$ と表されるので $u = \cos t$ とおく (例題

6.7 (ii) と同じ発想の置換積分である)。したがって、

$$\begin{aligned} 3 \int \frac{\sin t}{9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} dt &= 3 \int \frac{-1}{9-5u^2} du = \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{u\sqrt{5}-3} du - \int \frac{1}{u\sqrt{5}+3} du \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \log \left| \frac{u - \frac{3}{\sqrt{5}}}{u + \frac{3}{\sqrt{5}}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{5}} \log \left| \frac{\sqrt{5} - \sqrt{x^2+9}}{\sqrt{5} + \sqrt{x^2+9}} \right|. \end{aligned}$$

第二の積分は $u = \sin t$ という置換積分を行う:

$$\int \frac{\cos t}{4+5 \sin^2 t} dt = \int \frac{1}{4+5u^2} du = \frac{1}{5} \int \frac{1}{u^2 + \frac{4}{5}} du.$$

よって公式 (9) (p.124) より

$$\int \frac{\cos t}{4+5 \sin^2 t} dt = \frac{1}{2\sqrt{5}} \arctan \frac{\sqrt{5}}{2} u$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \arctan \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \sin t \right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \arctan \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right).$$

ここで $\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t} = \frac{9}{x^2+9}$ より $\sin^2 t = \frac{x^2}{x^2+9}$. しかも $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

で $x = 3 \tan t$ であるので $\sin t$ の符号と x の符号は一致することから

$\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ であることも用いた。以上をまとめて、

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4)\sqrt{x^2+9}} dx = \frac{1}{2\sqrt{5}} \log \left| \frac{\sqrt{5}-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{5}+\sqrt{x^2+9}} \right| + \frac{1}{2\sqrt{5}} \arctan \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right) + C.$$

(iv) V [3] (p.151) より $x = \frac{1}{\cosh t}$ とおいてもできるが $x = \cosh t$ とおいた方がやさしい。このとき、 $dx = \sinh t dt$ であって、 $x^2 - 1 = \sinh^2 t$ なので

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int dt = t + C.$$

第 3 章章末問題の 7 より $x = \cosh t \iff t = \log |x + \sqrt{x^2-1}|$. よって

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \log |x + \sqrt{x^2-1}| + C.$$

7. (i)

$$\int_0^2 (x^2 + x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + [x]_0^2 = \frac{20}{3}.$$

(ii) 命題 6.1 より

$$\int_{-2}^2 (x^6 + 101x^5 + x^3 + 1) dx = 2 \int_0^2 (x^6 + 1) dx = 2 \left(\left[\frac{x^7}{7} \right]_0^2 + 2 \right) = \frac{284}{7}.$$

(ii) $x = 2 \sin t$ とおくと

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t) dt$$

で例題 6.31 を用いて

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = 16 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1!!}{2!!} - \frac{\pi}{2} \frac{3!!}{4!!} \right) = \pi.$$

(iv) 部分積分を行う：

$$\int_0^\pi x \sin x dx = [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi.$$

8. $x + 2 = \frac{1}{t}$ とおく．以下 $t > 0$ として計算を行う ($t < 0$ の場合も

同じ)． $x = \frac{1-2t}{t}$ なので

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}} dx = - \int \frac{1}{\sqrt{3t^2-3t+1}} dt = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}}} dt.$$

さらに $t - \frac{1}{2} = \frac{u}{\sqrt{12}}$ とおくと

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du.$$

よって公式 (10) (p.124) より

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du = -\frac{1}{\sqrt{3}} \log |u + \sqrt{u^2+1}| + C.$$

$u = \sqrt{12} \left(t - \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} \frac{x}{x+2}$ なので

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}} dx = -\frac{1}{\sqrt{3}} \log \left| \frac{2\sqrt{x^2+x+1} - x\sqrt{3}}{x+2} \right| + C.$$

注意. $t < 0$ の場合は $-\log |u - \sqrt{u^2 + 1}| = \log |u + \sqrt{u^2 + 1}|$ に注意する

と答えはやはり同じ式で表すことができる。

9.

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+x+1)'}{\sqrt{x^2+x+1}}dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$$

第一の積分 : $t = x^2 + x + 1$ とおくと $dt = (x^2 + x + 1)'dx$ なので

$$\frac{1}{2} \int \frac{(x^2+x+1)'}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{t} = \sqrt{x^2+x+1}.$$

第二の積分 : $t = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right)$ とおいて

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1}}dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt.$$

よって公式 (10) (p.124) より

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \frac{1}{2} \log |t + \sqrt{t^2+1}| = \frac{1}{2} \log \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| + \frac{1}{2} \log \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

以上のことから

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \log \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| + C.$$

10. $t = x^{1/6}$ とおくと $x = t^6$ であって $dx = 6t^5dt$. よって

$$\int \frac{1}{x^{1/3} + x^{1/2}}dx = \int \frac{6t^5}{t^2 + t^3}dt = \int \frac{6t^3}{1+t}dt.$$

割り算を実行して

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^{1/3} + x^{1/2}} dx &= \int (6t^2 - 6t + 6) dt - 6 \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \log |1+t| + C = 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6 \log |x^{1/6} + 1| + C. \end{aligned}$$

第 7 章 章末問題解答.

1. 交点は $(1, 1)$, $(2, 4)$ であり、 $\int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx = \frac{1}{6}$.

2. (i) 倍角公式も用いて

$$\begin{aligned} \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\theta}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3}} d\theta &= \int_0^{3\pi} a \sin^2 \frac{\theta}{3} d\theta \\ &= \frac{a}{2} \int_0^{3\pi} \left(1 - \cos \frac{2\theta}{3}\right) d\theta = \frac{3a\pi}{2}. \end{aligned}$$

(ii) $t = 2x$ とおく：公式 (11) (p.124) も用いて

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{4} \left[t\sqrt{t^2 + 1} + \log |t + \sqrt{t^2 + 1}| \right]_0^2 = \frac{2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})}{4}. \end{aligned}$$

3. $t = f^{-1}(x)$ なので $y = g(f^{-1}(x))$ となる。合成関数の微分 (定理

4.4) より

$$\frac{dy}{dx} = g'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = g'(t)(f^{-1})'(x).$$

定理 4.6 より $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(t)}$. したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

注意. $g'(t) = \frac{dg}{dt}$, $f'(t) = \frac{df}{dt}$ なのでこの結論は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dg}{dt}}{\frac{df}{dt}}$$

と表すことができる。これは右辺を形式的に約分すると左辺になることを意味している。

4.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + 2 \cos 2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + 4 \cos^2 2\theta + 4 \cos 2\theta) d\theta \\ = & \frac{1}{2} \pi + \int_0^\pi (\cos 4\theta + 1) d\theta + 2 \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \pi + \pi = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

5. (i) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を代入して $r^6 = 4r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$. よって $r = 0$ または $r^2 = 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$. $r = 0$ のときは一点になり、領域を囲まないのだから考えなくてもよい。よって $r > 0$ としてよい。このとき、 $r = 2 |\cos \theta \sin \theta|$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

(ii) 倍角公式より $r = |\sin 2\theta|$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta \\ = & \frac{1}{4} \left([\theta]_0^{2\pi} - \left[\frac{\sin 4\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

6. (i) 考えている立体は $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ を頂点とする三角形を底面とし、 $(0, 0, c)$ を頂点とする三角錐である。 $0 \leq t \leq c$ として $z = t$

で切った断面は $\frac{at}{c}$ を底辺とし高さが $\frac{bt}{c}$ である三角形である。よって切り

口の面積は $\frac{ab}{2c^2}t^2$ 。したがって、体積は

$$\int_0^c \frac{ab}{2c^2} t^2 dt = \frac{abc}{6}.$$

注意. 例題 7.9 のように三角錐の体積の公式：底面積 $\times$ 高さ $\times \frac{1}{3}$ を用い

てもよい。

(ii) $-c \leq t \leq c$ として $z = t$ で切った断面は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{t^2}{c^2}$$

で囲まれる楕円であり、 t を固定すると $x = a\sqrt{1 - \frac{t^2}{c^2}} \cos \theta$, $y = b\sqrt{1 - \frac{t^2}{c^2}} \sin \theta$,

$0 \leq \theta < 2\pi$ と表すことができるので例題 7.7 を用いて断面積は $ab \left(1 - \frac{t^2}{c^2}\right) \pi$.

よって体積は

$$\pi \int_{-c}^c ab \left(1 - \frac{t^2}{c^2}\right) dt = \frac{4abc}{3} \pi.$$

7. (i) x の動く範囲は $0 \leq x \leq R$ であって $y = (R^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ と表

されるので

$$\begin{aligned} \pi \int_0^R y^2 dx &= \pi \int_0^R (R^{2/3} - x^{2/3})^3 dx \\ &= \pi \int_0^R (R^2 - 3R^{4/3}x^{2/3} + 3R^{2/3}x^{4/3} - x^2) dx = \frac{16}{105} \pi. \end{aligned}$$

(ii) x の動く範囲は $-a \leq x \leq a$ で $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ なので

$$\pi \int_{-a}^a y^2 dx = 2\pi \int_0^a y^2 dx = 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4\pi ab^2}{3}.$$

8. (i) $y = (R^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$, $-R \leq x \leq R$ とかきなおせるので,

$$\text{側面積} = 2\pi \int_{-R}^R y \sqrt{1 + |y'|^2} dx = 4\pi \int_0^R R^{1/3} x^{-1/3} (R^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} dx.$$

$t = R^{2/3} - x^{2/3}$ という置換を行うと, 側面積 $= \frac{12\pi}{5} R^2$.

(ii) x は $-R \leq x \leq R$ の範囲を動き $y = a \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ である。考えて

いる立体は $y = f_1(x) = a + \sqrt{R^2 - x^2}$ を x -軸の回りに回転してできる立

体から $y = f_2(x) = a - \sqrt{R^2 - x^2}$ を回転してできる立体を除いたもので

ある (ドーナツ状の立体である)。よって

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_{-R}^R (f_1(x) \sqrt{1 + f_1'(x)^2} + f_2(x) \sqrt{1 + f_2'(x)^2}) dx \\ &= 4\pi a R \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 4\pi a R \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = 4\pi^2 a R. \end{aligned}$$

9. (i) 考えている関数が不連続になったりする特異点は ∞ のみ。収

束の判定だけなら次でよい。 $x \geq 1$ で $\frac{1}{x(x^2+1)} \leq \frac{1}{x^3}$ なので例題 7.10 と定

理 7.7 (i) によって収束する。値を求めるためには以下のようにしなくて

はならない: $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ なので

$$\int_1^R \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \left[\log x - \frac{1}{2} \log(x^2+1) \right]_1^R = \log \frac{R}{\sqrt{R^2+1}} - \log \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{\sqrt{R^2+1}} = 1$ なので

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \log \sqrt{2}.$$

(ii) $|x| \rightarrow \infty$ のとき、 $\frac{x}{x^2+1} \geq \text{定数} \times \frac{1}{x}$ なので定理 7.7 と同様な考え方で

発散することがわかる。または次のようにしてもよい：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+1} dx &= \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_2}^{R_1} \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \log(x^2+1) \right]_{-R_2}^{R_1} = \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log \frac{R_1^2+1}{R_2^2+1}. \end{aligned}$$

これは収束しない。

注意. $V.P. \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+1} dx = 0$.

(iii) $\delta > -1$ とすると

$$\int_\delta^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \left[\frac{1}{2} \sqrt{x+1} \right]_\delta^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1+\delta}.$$

$\delta > -1$ を保って $\delta \rightarrow -1$ として $\frac{1}{2}$ に収束する。

(iv) 特異点は分母が 0 になる x であって、 $x = 1, 2$ である。積分区間を

例えば $(0, 1)$ と $(1, 2)$ にわけて考えて、 $\int_0^1 \frac{1}{x^2-3x+2} dx$ と $\int_1^2 \frac{1}{x^2-3x+2} dx$ が

ともに存在するときに限り、 $\int_0^2 \frac{1}{x^2-3x+2} dx$ も存在することに注意する。一

方、不定積分は

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \log|x-2| - \log|x-1| + C$$

であるので、 $\epsilon > 0$ とすると

$$\int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \left[\log \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \right]_0^{1-\epsilon} = \log \left| \frac{1+\epsilon}{\epsilon} \right| - \log 2$$

で $\epsilon > 0$ を保って $\epsilon \rightarrow 0$ としたとき、第一項は発散するので $\int_0^1 \frac{1}{x^2-3x+2} dx$

は発散する。したがって、 $\int_0^2 \frac{1}{x^2-3x+2} dx$ は発散する。

10. 例えば $0 \leq x \leq 1$ として 0 の近くで、

$$\frac{1}{2} x^{\gamma-1} \leq \frac{x^{\gamma-1}}{x+1} \leq x^{\gamma-1}.$$

よって $\int_0^1 x^{\gamma-1} dx$ と $\int_0^1 \frac{x^{\gamma-1}}{x+1} dx$ の収束は一致する。例 7.10 より $\gamma > 0$ で

収束、 $\gamma \leq 0$ で発散する。次に $\int_1^\infty \frac{x^{\gamma-1}}{x+1} dx$ を考えよう。 $x \geq 1$ で

$$\frac{x^{\gamma-1}}{2x} \leq \frac{x^{\gamma-1}}{x+1} \leq \frac{x^{\gamma-1}}{x} = x^{\gamma-2}$$

なので $\int_1^\infty \frac{x^{\gamma-1}}{x+1} dx$ と $\int_1^\infty x^{\gamma-2} dx$ の収束は一致する。例 7.10 より $\gamma-2 < -1$

で収束、 $\gamma-2 \geq -1$ で発散。以上をまとめて $\int_0^\infty \frac{x^{\gamma-1}}{x+1} dx$ は $0 < \gamma < 1$ で

収束、 $\gamma \leq 0$ または $\gamma \geq 1$ で発散する。

第 8 章 章末問題解答.

1. $\sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{n} \sin nx \right| \leq \frac{1}{n}$ なので $[0, 1]$ で恒等的に 0 になる関数に一樣収束する。

(ii) $0 < x \leq 1$ をかけて固定すると $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. 一方、 $f_n(0) = 1$

なので $f_n(x)$ は $[0, 1]$ で $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ という関数 f に各点収束する。もし、 f_n が $[0, 1]$ である関数に一致収束するとすればその関数に各点収束するので f_n はこの f に一致収束するはずである。しかし、 $\sup_{0 \leq x \leq 1} |e^{-n^2 x} - f(x)| = 1$ を確かめることができるので、 f_n が f に一致収束することは不可能である。したがって、 f_n は $[0, 1]$ で (どのような関数にも) 一致収束することはない。

注意. f_n は連続関数なので、もし f_n が f に一致収束するとすれば、定理 8.1 より f も連続でなければならないがこの f は $x = 0$ で不連続なので、 f_n は f に一致収束しないと結論してもよい。実数の完備性 (定理 1.9) と同様にして次の事実が成立つ: f_n が区間 I で一致収束する. $\iff \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| = 0$.

これを用いてもよいが $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |e^{-n^2 x} - e^{-m^2 x}| = 0$ を示すことはあまり簡単でない。

2. (i) $\left| (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^\gamma} \right| \leq \frac{1}{n^\gamma}$. よって命題 2.1 (ii) と定理 8.7 より一致かつ絶対収束することを確認することができる。

(ii)

$$\left| \frac{r^{2n} \sin^{4n} x}{n!} \right| \leq \frac{|r|^{2n}}{n!}.$$

一方、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|r|^{2n+2}}{(n+1)!} \bigg/ \frac{|r|^{2n}}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|r|^2}{n+1} = 0$$

なので定理 2.7 と定理 8.7 より、一様かつ絶対収束することがわかる。

3. 有限個の項をかってに変更してもべき級数の収束や発散は変わらないので、収束半径も変わらない。したがって、ここでの級数のように n が 1 から始まっても定理 8.9 や 8.10 を適用することができる。

(i) $a_n = n + 1$ なので定理 8.9 より収束半径は 1.

(ii) $x^2 = y$ とおくと, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^2} y^n$ という y に関するべき級数が得られる。

$a_n = \frac{r^n}{n^2}$ において y のべき級数としての収束半径は定理 8.9 より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r^n}{n^2} \bigg/ \frac{r^{n+1}}{(n+1)^2} \right| = \frac{1}{r}.$$

よって x のべき級数としての収束半径は $\frac{1}{\sqrt{r}}$.

(iii) 定理 8.10 を用いてもよいが、ここでは収束半径の定義にしたがって

求めてみよう。 $|x| < 1$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^{2n+1} = 0$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)|x|^{(n+1)^2}}{n|x|^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) |x|^{2n+1} = 0$$

がわかるので定理 2.7 より $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n^2}$ は収束。 $|x| \geq 1$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} n x^{n^2} \neq$

0 なので、定理 2.3 よりべき級数は収束しない。したがって、収束半径は

1.

4. (i) 定理 8.9 を用いる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} = \infty$ より収束半径は ∞ .

(ii) かつてな x に対して、定理 8.8 よりべき級数を項別微分できて $xy'' +$

$y' - y = 0$ を確かめることができる：

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{((n+1)!)^2},$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{((n+1)!)^2}$$

より

$$xy'' + y' - y = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n(n+1)}{((n+1)!)^2} + \frac{n+1}{((n+1)!)^2} - \frac{1}{(n!)^2} \right\} x^n = 0.$$

5. (i) $y' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$, $y'' = \frac{3}{4(x^2+x+1)^{3/2}}$, $y''' = -\frac{9}{8} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^{5/2}}$. よって

$y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}$, $y''(0) = \frac{3}{4}$, $y'''(0) = -\frac{9}{8}$. ゆえに

$$\sqrt{x^2+x+1} \cong 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3.$$

(ii)

$$f^{(k)}(x) = (\sqrt{x+1})^{(k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - (k-1) \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-k}$$

より $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f''(0) = -\frac{1}{4}$, $f'''(0) = \frac{3}{8}$, $f^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}$.

$(e^x)^{(k)} = e^x$. ライブニッツの定理 (命題 4.5) より $y'(0) = \frac{3}{2}$,

$$y''(0) = f''(0) + 2f'(0) + f(0) = \frac{7}{4},$$

$$y'''(0) = f'''(0) + 3f''(0) + 3f'(0) + f(0) = \frac{17}{8}$$

$$y^{(4)}(0) = f^{(4)}(0) + 4f'''(0) + 6f''(0) + 4f'(0) + f(0) = \frac{33}{16}.$$

よって

$$e^x \sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + \frac{33}{384}x^4.$$

6. (i) 第 4 章章末問題 5(iii) より $y^{(n)}(x) = -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$. し

たがって形式的に

$$\sin^2 x = \sin^2 a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} \cos\left(2a + \frac{n\pi}{2}\right) (x-a)^n.$$

収束半径は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n-1}}{n!} \cos\left(2a + \frac{n\pi}{2}\right) \right| \bigg/ \left| \frac{2^n}{(n+1)!} \cos\left(2a + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) \right| = \infty.$$

(ii) $y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right)$ より

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right).$$

よって $a \neq \pm 1$ におけるテイラー展開は形式的に

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{(1+a)^{n+1}} - \frac{1}{(a-1)^{n+1}} \right) (x-a)^n$$

となる。収束半径は

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{(1+a)^{n+1}} - \frac{1}{(a-1)^{n+1}} \right) \right| \bigg/ \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left(\frac{1}{(1+a)^{n+2}} - \frac{1}{(a-1)^{n+2}} \right) \right| \\ = & |a^2 - 1| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a-1)^{n+1} - (a+1)^{n+1}}{(a-1)^{n+2} - (a+1)^{n+2}} \right|. \end{aligned}$$

最後に現れた極限を求めよう： $|a+1| > |a-1|$ の場合は

$$\frac{|a^2-1|}{|a+1|} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+2} - 1} \right| = |a-1|.$$

同様にして $|a+1| < |a-1|$ の場合は $|a+1|$. $|a+1| = |a-1|$, すなわち、

$a=0$ のときはもとの式から 収束半径は 1 となることが直接わかる。以

上をまとめて、 $a \geq 0$ のとき、収束半径は $|a-1|$. $a < 0$ のとき、収束半

径は $|a+1|$.

注意. (ii) ではもとの関数の特異点は $x=1, -1$ である。テイラー級数の

収束半径はテイラー級数の中心点である a から特異点までの最短距離に

なっている。これは一般的に成立つ事実であるがくわしくは本ライブラ

リの複素解析の巻で解説される。

第 9 章 章末問題解答.

1. (i) 連続である: $f(x_1, x_2)$ を大きめに見積もる. そのためには分母を小さめに見積もる. $x_1 \neq 0$ として $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq |x_1|$ なので $\frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \leq$

$\frac{x_1^2}{|x_1|} = |x_1|$. これは $x_1 = 0$ で $x_2 \neq 0$ の場合も正しいのですべての

$(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ に対して成立つ. ゆえに

$$0 \leq \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} f(x_1, x_2) \leq \lim_{x_1 \rightarrow 0} |x_1| = 0.$$

すなわち、 $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} f(x_1, x_2) = f(0, 0) = 0$.

(ii) 連続でない。 (x_1, x_2) の $(0, 0)$ への近付け方によって極限が異なる。例

えば、 $k \neq -1$ を定数として $x_2 = kx_1$, $x_1 \neq 0$ とおく: $f(x_1, kx_1) = \frac{k}{1+k}$.

ゆえに $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} f(x_1, kx_1) = \frac{k}{1+k} \neq f(0, 0)$.

2. (i)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_1^3 - x_2^2 x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{-x_1^4 + 6x_1^2 x_2^2 - x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{2x_1^3 x_2 - 6x_1 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{2x_1 x_2^3 - 6x_1^3 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^3}.$$

(ii)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = e^{x_1} \sin x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{x_1} \cos x_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = e^{x_1} \cos x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = e^{x_1} \sin x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -e^{x_1} \sin x_2.$$

3. $f(x_1, x_2, y) = x_1 x_2 - y$ とおくと, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 1, 1) = 1$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = -1$ より $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) - (y - 1) = 0$, すなわち、

$x_1 + x_2 - y = 1$ が接平面の方程式である。

法線とは接平面に直交するような直線のことである。接平面の方程式

$x_1 + x_2 - y = 1$ は $\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が直交していることを意味し

ている。よって接平面は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と直交していることがわかる。したがっ

て、法線は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と平行である。求める法線は $(1, 1, 1)$ を通るので

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。ただし、 t は実数全体を動くパラメータである。

4. 訂正. ミスプリントがありました。以下のように問題文を訂正します。

$y = f(x_1, x_2)$ とし、 $x_1 = e^s \cos t$, $x_2 = e^s \sin t$ とおく。このとき、 Δf を s, t で表せ。

ただし、 $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ とする。

合成関数の微分 (定理 9.5) を用いるために $\frac{\partial s}{\partial x_1}$, $\frac{\partial s}{\partial x_2}$, $\frac{\partial t}{\partial x_1}$, $\frac{\partial t}{\partial x_2}$ を計算しなくてはならない。 $x_1^2 + x_2^2 = e^{2s}$ より $s = \frac{1}{2} \log(x_1^2 + x_2^2)$ さらに $\tan t = \frac{x_2}{x_1}$, よって $t = \arctan \frac{x_2}{x_1}$ (t, s を x_1, x_2 で表すやり方は極座標の

場合に似ている) よって

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\frac{\partial t}{\partial x_1} = \frac{-\frac{x_2}{x_1^2}}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial t}{\partial x_2} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial t}{\partial x_1} \right) \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial s}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial t}{\partial x_1} \right) \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \frac{x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &+ \frac{\partial f}{\partial s} \frac{-x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right).$$

$$x_1^2 + x_2^2 = e^{2s} \text{ なので}$$

$$\Delta f = \frac{1}{e^{2s}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right).$$

5. 3次元極座標の定義 (pp.241–242) より $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\theta = \arctan \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}$, $\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$. よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_1} &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, & \frac{\partial r}{\partial x_2} &= \frac{x_2}{r}, & \frac{\partial r}{\partial x_3} &= \frac{x_3}{r}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= \frac{x_1 x_3}{r^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= \frac{x_2 x_3}{r^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \frac{\partial \theta}{\partial x_3} &= -\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{r^2}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, & \frac{\partial f}{\partial x_3} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{x_1}{r} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{x_1 x_3}{r^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{x_2}{r} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{x_2 x_3}{r^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{x_3}{r} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{r^2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2.
\end{aligned}$$

ここで $x_1^2 + x_2^2 = r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \sin^2 \theta$ も用いた。

6. (i) 合成関数の微分 $\frac{dy^3}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx}$ などにより

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

よって $(3y^2 - 2xy) \frac{dy}{dx} = y^2 + 1$, したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 1}{3y^2 - 2xy}.$$

(ii) $\log$ をとる : $\log y = y \log x$. x で両辺を微分すると、

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{dy}{dx} \log x, \quad \text{すなわち, } \left(\frac{1}{y} - \log x\right) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1 - y \log x)}.$$

7.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{-x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{-x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{2x_1^2 - x_2^2 - 1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^{5/2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \frac{-x_1^2 + 2x_2^2 - 1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^{5/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{3x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^{5/2}}.$$

よって $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. したがって、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ において

$$f(\mathbf{x}) \cong f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{x} + \frac{(H_f(0, 0)\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})}{2!}$$

より $f(x_1, x_2) \cong 1 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$.

8. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 4x_1^3 - 20x_1 + 16x_2 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4x_2^3 + 16x_1 - 20x_2 = 0$ より $5x_1 - 4x_2 = x_1^3$, $4x_1 - 5x_2 = -x_2^3$. 第一式より $x_2 = \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_1^3$.

これを第二式に代入して、 x_1 についての3次方程式を導いてもよいが、ここでは (第一式) $\times x_2 +$ (第二式) $\times x_1$ を考えて、 $4(x_1^2 - x_2^2) = x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)$ を得る。よって $x_1 = x_2$ または $x_1 = -x_2$ または、 $x_1 x_2 = 4$.

$$x_1 = x_2 \implies x_1 = 0 \text{ または } \pm 1.$$

$$x_1 = -x_2 \implies x_1 = 0 \text{ または } \pm 3.$$

$x_1 x_2 = 4$ とすると $x_2 = \frac{4}{x_1}$ を用いて x_2 を消去すると $x_1^4 - 5x_1^2 + 16 = 0$.

しかし、これを満たす実数 x は存在しない。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 12x_1^2 - 20, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 12x_2^2 - 20, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 16$$

より

$$H_f(x_1, x_2) = 4 \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 5 & 4 \\ 4 & 3x_2^2 - 5 \end{pmatrix}$$

定理 9.8 または 2 変数の場合の言い換え (p.246) を適用すると $(0, 0)$ で極大値 0 を、 $(3, -3)$, $(-3, 3)$ で極小値 -162 をとることがわかる。一方、 $(1, 1)$, $(-1, -1)$ で極小値も極大値もとらないことは以下のようにしてわかる。例えば $(1, 1)$ を考える。式 (8) (p.245) より

$$f(x_1, x_2) \cong -2 + \left(\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right). \quad (*)$$

(v_1, v_2) のとり方によって右辺の第二項が正になったり、負になったりすれば f は $(1, 1)$ で極大値も極小値もとらないことを確かめることができる (もし点 $(1, 1)$ で極値をとれば、その近くでは常に $f(x_1, x_2) - f(1, 1) \geq 0$ または ≤ 0 でなくてはならず、第二項は常に 0 以上か 0 以下である)。例えば $(v_1, v_2) = (1, 0)$ とおくと第二項 $= -4$ 。 $(v_1, v_2) = (1, 1)$ とおくと第二項 $= 8$ 。 よって f は $(1, 1)$ で極値をとらない。

注意. 上の議論のもととなった式 $(*)$ は等式ではないので上の議論は厳密ではないが、実用上はこれで十分であろう。厳密には、 $(v_1, v_2) = (1, 0)$, または $= (1, 1)$ に沿って $(1, 1)$ の近くで (x_1, x_2) を変化させて、 $f(1+h, 1)$ や $f(1+h, 1+h)$ の $x_1 = 1$ 前後での増減を調べればよい。

9. ラグランジュの未定乗数法を用いる： $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^4 + x_2^4 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ とおく。拘束条件は $g(x_1, x_2) \equiv x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ であり、 $g(x_1, x_2) = 0$ の上で $\nabla g(x_1, x_2) \neq 0$ であることに注意する。 $\nabla L = 0$ より $2x_1^3 = x_1\lambda$, $2x_2^3 = x_2\lambda$. 第一式より $x_1 = 0$ または $\lambda = 2x_1^2$. $\lambda = 2x_1^2$ を第二式に代入して $x_2^3 = x_2x_1^2$. よって $x_2 = 0$ または $x_2 = \pm x_1$. したがって、極値をとる候補は $(x_1, x_2) = (0, \pm 1), (\pm 1, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 一方、最大値、最小値は上の点のいずれかでとるので、関数値を比較して $(0, \pm 1), (\pm 1, 0)$ で最大値 1, それ以外の 4 点で最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

注意. $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ はいたるところ連続であり、 $\{(x_1, x_2); g(x_1, x_2) = 0\}$ は有界閉集合なので定理 9.9 より f の最大値、最小値は確かに存在する。

10. $y = f(a, b, c) = (\ell - a)(\ell - b)(\ell - c)$ の考えている条件の下での最大値を求める。 $2\ell = a + b + c$ より $c = 2\ell - a - b$ である。よって $f(a, b, c)$ から (例えば) c を消去すると, $F(a, b) = (\ell - a)(\ell - b)(a + b - \ell)$. ここで a, b は

$$D = \{(a, b); a, b \geq 0, a + b \leq 2\ell\}$$

を動く。 D は有界閉集合なので F は D で最大値をとる。”最大値, 最小

値の求め方：その 1” (p.247) の手順にしたがおう。

(i) D の内部 $\{(a, b); a, b > 0, a + b < 2\ell\}$ で考える。 $\frac{\partial F}{\partial a}(a, b) = \frac{\partial F}{\partial b}(a, b) = 0$ として、極値の候補は $(\ell - b)(2\ell - 2a - b) = 0$, $(\ell - a)(2\ell - a - 2b) = 0$.
よって $\ell = b$ または $2a + b = 2\ell$, しかも、 $\ell = a$ または $a + 2b = 2\ell$. これらを満たす a, b で D の内部にあるものは $(a, b) = \left(\frac{2\ell}{3}, \frac{2\ell}{3}\right)$ だけしかない。このとき $c = \frac{2\ell}{3}$ となって考えている三角形は正三角形となる。

(ii) ∂D 上で考える。 $(a, b) \in \partial D \implies a = 0$ または $b = 0$ または $a + b = 2\ell$ でいずれの場合も三角形はつぶれて面積は 0 である。したがって正三角形のときに面積が最大となる。

注意. ラグランジュの未定乗数法でもできないことはないが拘束条件が $\{(a, b, c); a + b + c = 2\ell, a, b, c > 0\}$ となり、等式だけで表されないので、本書で解説した未定乗数法を直接適用することはできず、修正が必要である。

11. (i) 例題 6.12 と同じ方法で部分積分を 2 回行う：

$$\int e^{tx} \sin x dx = \frac{t \sin x - \cos x}{t^2 + 1} e^{tx} + C.$$

(ii) 定理 9.10 (ii) より

$$\int x^2 e^{tx} \sin x dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{t \sin x - \cos x}{t^2 + 1} e^{tx} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{t \sin x - \cos x}{t^2 + 1} \right) e^{tx} + 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t \sin x - \cos x}{t^2 + 1} \right) \frac{\partial}{\partial t} e^{tx} + \frac{t \sin x - \cos x}{t^2 + 1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{tx} \\
&= \frac{e^{tx}}{(t^2 + 1)^3} (2t^3 \sin x - 6t^2 \cos x - 6t \sin t + 2 \cos t) \\
&+ \frac{2xe^{tx}}{(t^2 + 1)^2} (-t^2 \sin x + 2t \cos x + \sin x) + \frac{x^2 e^{tx}}{t^2 + 1} (t \sin x - \cos x).
\end{aligned}$$

答えとしてはこのままでよい。

12. (i)

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 \left(\int_x^{4x-x^2} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^3 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x}^{y=4x-x^2} dx \\
&= \int_0^3 \left(24x^3 - 17x^4 + 4x^5 - \frac{1}{3}x^6 \right) dx = \frac{1458}{35}.
\end{aligned}$$

(ii) $D \iff 0 < x < y + 1 - 2\sqrt{y}, 0 < y < 1$. よって

$$\begin{aligned}
&\iint_D y dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{y+1-2\sqrt{y}} y dx \right) dy \\
&= \int_0^1 (y^2 + y - 2y^{3/2}) dy = \frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

(iii) 極座標 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を用いる。このとき $D \iff 1 < r < 3$,

$0 \leq \theta < 2\pi$ なので

$$\begin{aligned}
&\iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^3 r \log r^2 dr \right) d\theta \\
&= 4\pi \int_1^3 r \log r dr = 4\pi \left[\frac{r^2}{2} \log r - \frac{r^2}{4} \right]_1^3 = 18\pi \log 3 - 8\pi.
\end{aligned}$$

$\int r \log r dr$ の計算で $u' = r, v = \log r$ として部分積分を用いた。

13. (i) $D \iff 0 < z < 1 - x - y, x, y > 0$, **なので**

$$\begin{aligned}
 \int \int \int_D (x+y) dx dy dz &= \int \int_{x+y < 1, x, y > 0} \left(\int_0^{1-x-y} (x+y) dz \right) dx dy \\
 &= \int \int_{x+y < 1, x, y > 0} (x+y-x^2-y^2-2xy) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x+y-x^2-y^2-2xy) dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6} \right) dx = \frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$

(ii) **極座標** $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ **を用いる。**

$D \iff 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ **なので**

$$\begin{aligned}
 \int \int \int_D xyz dx dy dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^5 \sin^3 \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi dr \right) d\theta \right) d\varphi \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi.
 \end{aligned}$$

最初の積分では例題 6.7 (i) と同じ置換積分を、二番目の積分では倍角公

式を用いて $\frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{48}$.