168 頁　補足説明

分布が未知の場合：S^2 の不偏性の証明

母平均から測った偏差の２乗和を次のように分解する。

$$W \equiv \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{(X_i-\overline{X})+(\overline{X}-\mu)\right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n} (\overline{X}-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2 + n(\overline{X}-\mu)^2 .$$

W の期待値が $n\sigma^2$ となる事は明らかである。右辺の展開では積の項も生じるが、$(\overline{X}-\mu)$ が共通なので

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{(X_i-\overline{X})(\overline{X}-\mu)\right\} = (\overline{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})$$

となり 0 となる。さらに $E(\overline{X}-\mu)^2$ は $\overline{X}$ の分散だから $\dfrac{\sigma^2}{n}$.　結局

$$nE(\overline{X}-\mu)^2 = \sigma^2$$

となる。以上より、$n\sigma^2 = E\{\sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2\} + \sigma^2$ が導かれ、$E\{\sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2\} = n\sigma^2 - \sigma^2$ となる。S^2 の不偏性は明らかだろう。

問題解答（5 章）

1.（分布が既知、分散が未知として計算します.）

標本平均=(2+5+0+4+8+1+9+7+3+6)÷10=4.5

分散=$\dfrac{1}{9}\{(2^2+5^2+0^2+4^2+8^2+1^2+9^2+7^2+3^2+6^2) - 10\times(4.5)^2\} = \dfrac{82.5}{9}$　9.17

標準偏差は $\sqrt{9.17}$. 標準化確率変数は、$\dfrac{4.5-\mu}{\sqrt{9.17}\ \big/\sqrt{10}}$ （μは母平均）.

Ｚは自由度 9 の t 分布にそって分布する.自由度 9 の上側 2.5%点は 2.262 なので、-2.262≦Ｚ≦2.262 を変形して求めた 2.33≦μ≦6.67 が求める 95%信頼区間である.

2.　（分布が未知、分散も未知として計算します.）

標本平均は 0.318、S=0.024996.打率を t 確率変数になおすと、$t=\dfrac{0.318-\mu}{0.025/\sqrt{11}}$.　t は自由度 10 の t 分布に従って分布する.右裾 5%点は 1.81 であるから、-1.81≦t≦1.81 を変形して、0.304≦μ≦0.332 が求める信頼区間である.6 回はみ出る.

3. $S^2=16$. 母分散σ^2の 90%信頼区間を求める. $X=\dfrac{19S^2}{\sigma^2}$とすれば、Xは自由度 19 の$\chi^2$確率変数であり、$\chi^2_{0.05}(19)\le X\le\chi^2_{0.95}(19)$を変形して、以下の式を導く.

$\dfrac{19S^2}{\chi^2_{0.95}(19)}\leqq\sigma^2\leqq\dfrac{19S^2}{\chi^2_{0.05}(19)}$.　分布表より$\chi^2_{0.05}(19)=10.12$、$\chi^2_{0.95}(19)=30.14$.

よって、整理すると、3.18≦σ≦5.48.

4.　（正規分布を使う.） $P\left(\dfrac{\sqrt{256}(\overline{X}-\mu)}{3}\le 1.645\right)=0.9$を整理して、

a)　$P\left(171-\dfrac{3\times1.645}{\sqrt{256}}\le\mu\le171+\dfrac{3\times1.645}{\sqrt{256}}\right)=0.9$, $P(170.692\le\mu\le171.308)=0.9$

b)　$P\left(171-\dfrac{3\times1.645}{\sqrt{100}}\le\mu\le171+\dfrac{3\times1.645}{\sqrt{100}}\right)=0.9$, $P(170.506\le\mu\le171.494)=0.9$

5.　大きさ 5 のとき、母数λの推定量$\dfrac{1}{5}\sum_1^5 X_t$の分散は$\dfrac{\lambda}{5}$、（個々の分散はλ、無作為標本だから、和の分散は5λ、それを 25 で割って求まる.）大きさ 10 のとき推定量の分散は$\dfrac{\lambda}{10}$. $\dfrac{\lambda}{5}>\dfrac{\lambda}{10}$より、2 回目の方が精度がよい.精度を増すには観測個数を増やせばよい.

$\overline{X}-\mu$

a) 分散のσ^2の無限母集団からとられた大きさ n の標本平均を$\overline{X}$とすると、$V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$、$\sigma=10$、$n=100$を代入すると、$V(\overline{X})=1$. だから$Z=\overline{X}-\mu$. $|\overline{X}-\mu|\ge1$の両辺を$\sqrt{V(\overline{X})}$で割って標準化すると、$|Z|\ge1$. そして$\Phi(1)=0.8413$だ

から、はずれの確率 $P\{|Z|\geq 1\}$ は $2(1-\Phi(1))=0.3174$． 標本平均が母平均から1以上はずれる確率は 0.3174．

標準化された確率変数を Z とおくと，チェビシェフの不等式(4.12)式により、$P(\{|Z|\geq 1\})\leq 1^{-2}$ となる．はずれ確率の上限は 1 となり、応用上役に立たない．

b) a)と同様に行う． $n=400$ だから $V(\overline{X})=1/4$． $|\overline{X}-\mu|\geq 1$ の両辺を $\sqrt{V(\overline{X})}$ で割って標準化すると、$|Z|\geq 2$． $\Phi(2)=0.9773$，だから、標本平均が母平均より 1 以上はずれる確率は 0.0454. チェビシェフの不等式によれば、はずれ確率の上限は 0.25.

7. n 個の観測値の平均を $\overline{X}$ とすると、$\overline{X}$ の分布は $n\,(\mu, \frac{1}{n}2.5^2 分)$ だから、

$P\left(\frac{1}{2.5}\sqrt{n}\,|\,\overline{X}-\mu\,|\leq 1.65\right)=0.9$ となる． $P(|\,\overline{X}-\mu\,|\leq\frac{1}{2})=0.9$ にあわすには、

$\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{n}}1.65\times 2.5$ より、68 人.

8. 仮定より $E(\hat{\theta})=\theta$． $E(\hat{\theta}^2)=\theta^2$ とすると，$V(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}^2)-\{E(\hat{\theta})\}^2=\theta^2-\theta^2=0$．

逆に $V(\hat{\theta})=0$ なら $E(\hat{\theta}^2)=\theta^2$，したがって求める条件は $V(\hat{\theta})=0$．

9. $S^2=0.04,\ Z=(20-1)\frac{0.04}{\sigma^2}$ は自由度 19 の χ^2 分布にしたがって分布する.表より $P\{8.907\leq Z\leq 32.85\}=0.95$.だから σ^2 の 95%の信頼区間は

$\frac{19\times 0.04}{32.85}\leq\sigma^2\leq\frac{19\times 0.04}{8.907}$、となり、信頼区間は $0.023\leq\sigma^2\leq 0.085$．

10. 復元抽出，$S=3$ だから、 $Z=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{120-\mu}{3/\sqrt{n}},\ n=\frac{5N}{100}$，として、$P(-2.576\leq Z\leq 2.576)=0.99$ を変換していく． $120-\frac{77.28}{\sqrt{5N}}\leq\mu\leq 120+\frac{77.28}{\sqrt{5N}}$． 信頼

区間幅を 0.3 にするには、$\frac{77.28}{\sqrt{5N}} = 0.15$ とすれば＋よい．だから $N \approx 53086$ になる．

11. $V(\overline{X}) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$,かつ $n = \frac{N}{2}$ だから, $V(\overline{X}) = \frac{(N/2)}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{(N/2)} = \frac{\sigma^2}{N-1}$.

$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{N-1}} = \frac{120-\mu}{3/\sqrt{N-1}}$ と標準化して先の不等式を変換していくと

$120 - \frac{3 \times 2.576}{\sqrt{N-1}} \le \mu \le 120 + \frac{3 \times 2.576}{\sqrt{N-1}}$ となる． $0.15 = \frac{3 \times 2.576}{\sqrt{N-1}}$ を満たすためには

$N = 2655$.

12. $\Phi = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$ を最小にする条件は $\frac{d\Phi}{d\mu} = 0$ 、 かつ $\frac{d^2\Phi}{d\mu^2} \ge 0$.

$\frac{d\Phi}{d\mu} = -2\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) = 0$ ． だから $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ． 他方、

$\frac{d^2\Phi}{d\mu^2} = -2\sum_{i=1}^{n} (-1) = 2n > 0$.

13. n が 3 の場合の証明を示そう． $y_1 \le y_2 \le y_3$ としておく．

$$\Phi^{**}(\mu) = |y_1 - \mu| + |y_2 - \mu| + |y_3 - \mu| .$$

i) もし $\mu \le y_1$ なら、$\Phi^{**}(\mu) \ge \Phi^{**}(y_1)$.

ii) もし $y_1 \le \mu \le y_2$ なら、 $|y_1 - \mu| + |y_2 - \mu| = y_2 - y_1$ だから $\Phi^{**}(\mu) \ge \Phi^{**}(y_2)$. 以下、明らかであろう。

順序統計量を $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, \cdots, X_{(n-2)}, X_{(n-1)}, X_{(n)}$ とする．もちろん、$j < k$ ならば $X_{(j)} \le X_{(k)}$ となっている．順序統計量については以下が成り立つ．

$\sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu| = \sum_{i=1}^{n} |X_{(i)} - \mu| = |X_{(1)} - \mu| + \cdots + |X_{(n)} - \mu|$. 以下、右辺を分析する．

[1] $|X_{(1)} - \mu| + |X_{(n)} - \mu|$ は、 $X_{(1)} \le \mu \le X_{(n)}$ なる μ を採れば、最小化され、値は $(X_{(n)} - X_{(1)})$ となる．なぜなら、$\mu < X_{(1)}$ なら、$|X_{(n)} - \mu| > (X_{(n)} - X_{(1)})$ ．また $\mu > X_{(n)}$

なら、$\left|X_{(1)}-\mu\right|>(X_{(n)}-X_{(1)})$となるからである.

[2]　$(\left|X_{(2)}-\mu\right|+\left|X_{(n-1)}-\mu\right|)$は、$X_{(2)}\le\mu\le X_{(n-1)}$となる$\mu$を採れば、最小化でき、その値は$(X_{(n-1)}-X_{(2)})$となる. [1]と合わせて、$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\mu\le X_{(n-1)}\le X_{(n)}$.　従って、[2]が成立すれば、[1]も成立する.以下、同様の議論を繰り返す.（最終項は場合分けをする.）

ケース A：　$n=2m-1$　で、n が奇数の場合. $\left|(X_{(m)})-\mu\right|$を minimize する.　先の方法を成立させる為には$\mu=X_{(m)}$でなければならない.そして、その値は 0 となる. $X_{(m)}$は中央値である.故に$\min.\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\mu\right|$を成立させる$\mu$の推定量は中央値である. $\min.\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\mu\right|=(X_{(n)}+\cdots+X_{(m+1)})-(X_{(m-1)}+\cdots+X_{(1)})$

ケース B：　$n=2m$ で n が偶数の場合.$(\left|X_{(m)}-\mu\right|+\left|X_{(m+1)}-\mu\right|)$を minimize する.先の計算法によれば、$X_{(m)}\le\mu\le X_{(m+1)}$でなければならない.そして、値は$(X_{(m+1)}-X_{(m)})$となる.この場合、$(X_{(m)}-X_{(m+1)})/2$が中央値であり、中央値が、$\mu$のとり得る 1 つの数値である.故に、$\mu$の推定量が中央値であれば、min. $\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\mu\right|$が成立する.$(\min.\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\mu\right|=(X_{(n)}+\cdots+X_{(m+1)})-(X_{(m)}+\cdots+X_{(1)}))$

6 章

本章の特質は、帰無仮説の下でも対立仮説の下でも、Z と記された確率変数に変換して第 1 種の過誤の確率と第 2 種の過誤の確率を計算しようとすることにあります.この標準化された Z を使えば、平均などの検定は特定の不等式を公式として覚える必要がありません.自然な形で変数を変換することにより検定

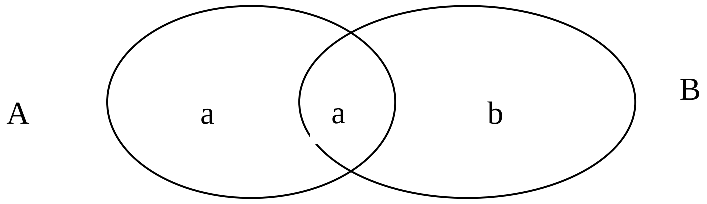
に関する不等式が導出できます.**単純仮説の検定の一般論(上級)：** 帰無仮説 $H_0:\theta=\theta_0$ の下での同時密度を L_0 とし，同じく対立 $H_1:\theta=\theta_1$ の下での同時密度を L_1 と記す.(n 個の確率変数についての同時積分を簡単化して示す.)

Neyman - Person　基本定理(Most Powerful Test)

Size α の critical region A は

(1) $\dfrac{L_1}{L_0}\geq k$ (inside A)　　(2) $\dfrac{L_1}{L_0}\leq k$ (outside A)

と定めればよい.証明：任意の critical region を B とする.A と B の関係を次図のように示す.



Size α は critical region A と B について共通、$\alpha=\int_A L_0dx=\int_B L_0dx$.

かつ ab は A と B の共通部分だから、$\int_a L_0dx=\int_b L_0dx$ となる.ここで Power の比較をする.

$$\text{Power B}=\int_B L_1dx\ ,\qquad \text{Power A}=\int_A L_1dx$$

と棄却域 A と B の power が定義できるか、条件により

$$\text{PowerB}-\text{PowerA}=\int_B L_1dx-\int_A L_1dx=\int_b L_1dx-\int_a L_1dx$$

となる.しかし(2)により、$\int_b L_1dx\leq k\int_b L_0dx$、また(1)により、

$\int_a L_1dx\leq k\int_a L_0dx$ だから、$\text{PowerB}\leq\text{PowerA}$ となる.つまり任意の検定 B に対して、検定 A の検出力が大となる.

片方検定の Locally Most Powerful One-sideTest： $H_0:\theta\leq\theta_0,\ H_1:\theta>\theta_0$ と

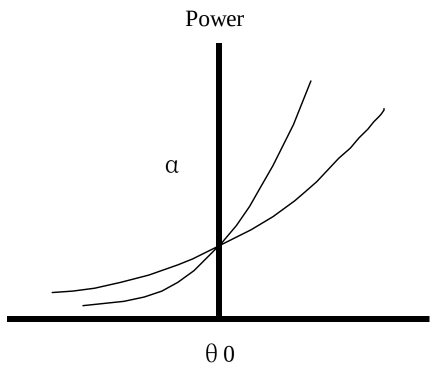
する.LB検定では、MP 検定の場合と同様に critical regions A: $\alpha=\int_A L_0 dx$ と定める.検出力は $\int_A L_1 dx$ である.ただし L_0 は θ_0 の下での同時密度である.そして LB検定は、Size α を共通にする検定の内で θ_0 の近傍での Powerの増分が最大のもの、つまりPower の傾き $\beta'(\theta)\equiv\int_A L_1' dx$ が最大となる検定である. LB 検定 A は次の条件から求められる.

(3) $L(\theta_0)'\equiv L(\theta)'|_{\theta_0}\geq kL_0$ (inside A)、(4) $L(\theta_0)'\leq kL_0$ (outside A).

証明：条件により、$\int_A L(\theta_0)'dx-\int_B L(\theta_0)'dx=\int_a L(\theta_0)'dx-\int_b L(\theta_0)'dx\geq 0$.

（第１項はAの中、第２項はAの外である）.従って検定 A の Power の増分が検定 B のそれにまさる.

注：(3)と(4)の条件は $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log L_{(\theta)}|_{\theta_0}$ と k と大小比較であるから、スコアー検定に結びつく.



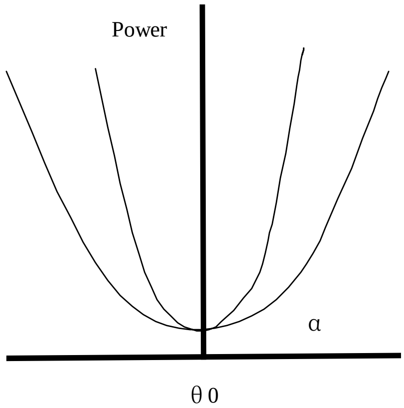
Locally Best Unbiased Most Powerful Test (LBU)

検定： $H_0:\theta=\theta_0$, $H_1:\theta\neq\theta_0$ .Power function が二次まで微分可能であるとする.また検定のサイズはα, かつ帰無仮説の点での検出力関数は flat であるとする.(**unbiased test**) そして LBU 検定は、θ_0の近傍での検出力関数の２次微

分が最大になる検定である.LBU 検定の棄却域 A は以下の条件を満たす.

(5)　$L(\theta_0)'' \geq k_1 L(\theta_0) + k_2 L(\theta_0)'$　(inside A)

(6)　$L(\theta_0)'' \leq k_1 L(\theta_0) + k_2 L(\theta_0)'$　(outside A)



証明：条件により

$$\int_A L''(\theta_0)dx - \int_B L''(\theta_0)dx = \int_a L''(\theta_0)dx - \int_b L''(\theta_0)dx$$

(A の内と外に分ける)

$$\geq k_1\int_a L(\theta_0)dx + k_2\int_a L'(\theta_0)dx - \{k_1\int_b L(\theta_0)dx + k_2\int_b L'(\theta_0)dx\}$$

($\int_A L(\theta_0)dx$ などの積分範囲に ab を加える)

$$= k_1\int_A L(\theta_0)dx + k_2\int_A L'(\theta_0)dx - \{k_1\int_B L(\theta_0)dx + k_2\int_B L'(\theta_0)dx\} = 0\ .$$

（最後の等号は検定のサイズが変わらないこと、ならびに検出力関数が帰無仮説の点で平坦になることを条件としている.）

問題解答 (6 章)

1.　$Z = \dfrac{30.9 - 30.3}{\sqrt{(6.4^2 + 5.87^2)/470}} \approx 1.50$ より, P 値 0.067 を得て,差が無いという帰無仮説は棄却できない.

2. $Z = \dfrac{20102 - 15006}{8900\sqrt{1/183 + 1/95}} \approx 4.53$ より，P 値ほぼ 0 で，大阪と京都の被服履物支出の差は有意と判断できる．

3. $Z = \dfrac{0.230 - 0.192}{\sqrt{0.230 \cdot 0.770/2609 + 0.192 \cdot 0.808/146}} \approx 1.13$ より，P 値 0.13 で差が無いという帰無仮説は棄却できない．

4. $Z = \dfrac{0.301 - 0.305}{\sqrt{0.301 \cdot 0.699/9250 + 0.305 \cdot 0.695/8094}} \approx -0.57$ より，P 値 0.28 を得て，差が無いという帰無仮説は棄却できない．

5. 1)母分散は，$\dfrac{(15-1) \cdot 134 + (18-1) \cdot 88}{15 + 18 - 2} \approx 109$ と推定されるので，標準偏差は，10.4．よって，$Z = \dfrac{83.3 - 80.9}{10.4\sqrt{1/15 + 1/18}} \approx 0.66$ であり，P 値はほぼ 0.25,有意水準 5%で差が無いという帰無仮説は棄却できない(自由度 31 の t 検定).（付表 6 では自由度が 30 の行を見ると、75%点は 0.683 だから、自由度が 31 の場合も P 値はほぼ 0.25 になることがわかる。）

2)$Z = \dfrac{83.3 - 80.9}{\sqrt{134/15 + 88/18}} \approx 0.65$ を得て，正規分布表より P 値 0.26．棄却できない．

6. 標本平均, 標本標準偏差は, $\overline{A} = 14.1, \overline{B} = 19.0, S_A{}^2 = 10.9, S_B{}^2 = 6.7$ で, n は 10.

検定統計量$= \dfrac{\overline{A} - \overline{B}}{\sqrt{(S_A{}^2 + S_B{}^2)/n}} \approx -3.69$ より，P 値はほぼ 0 で棄却できる．

7. 幼児死亡率と一人あたり GNP の 2 変数について検定を行った．欠損値のあるイラクのデータは排除したので，観測個数は 16 である．標本相関係数は-0.64 と計算でき，検定統計量(6.25)式は，-3.12 である．t 分布表から相関が無いという帰無仮説は棄却され,相関は有意となる．例 6.15 も参照.

8.

$Z=\dfrac{0.4342-0.4272}{\{0.4342(1-0.4342)+0.4272(1-0.4272)+2\cdot 0.4342\cdot 0.4272\}/73211875}\approx 64.54$ より，P 値はほぼ 0 となり、差は有意である.

9. $\dfrac{7}{48}=0.146, \dfrac{14}{21}=0.667$ から，$\dfrac{0.146-0.667}{\sqrt{\{0.146(1-0.146)\}/48+\{0.667(1-0.667)\}/21}}$ は-4.5 となり,P 値ほぼ 0 を得て,棄却できる.

10. 有意水準 5%の場合は，本文を参照(0.83). 以下テキスト同様の方法で，有意水準 1%は 0.95，10%は 0.71，25%は 0.48.

11. $\overline{X}=\overline{X}_1-\overline{X}_2, E(\overline{X})=\mu_1-\mu_2, V(\overline{X})=\left(\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}\right)=\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{cn_2}\right)\sigma_1{}^2$. $\sigma_1{}^2$ は

$\sigma_1{}^2=E\{\dfrac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)^2\}$,だから(a) $E\{\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)^2\}=(n_1-1)\sigma_1{}^2$.同様にして、

$\sigma_2{}^2=\dfrac{\sigma_1{}^2}{c}=E\{\dfrac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)^2\}$ だから、(b) $cE\{\sum_{i=1}^{n_2}\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)^2\}=(n_2-1)\sigma_1{}^2$.

(a)(b) を合わせれば、 $\sigma_1{}^2$ の不偏推定は $s_1{}^2=\dfrac{1}{n_1+n_2-2}\left\{\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)^2+c\sum_{i=1}^{n_2}\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)^2\right\}$. $H_0:\mu_1=\mu_2$ の検定は，

$t=(\overline{X}_1-\overline{X}_2)/\sqrt{\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{cn_2}\right)s_1{}^2}\sim t(n-2)$ を利用すればよい.