

「工科のための力学」演習問題略解 正誤表

p.2	第 1 章演習問題 1.(3)	(誤) = 12	(正) = -12
-----	-----------------	----------	-----------

【第1章演習問題】

1.

$$(1) \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{i} + \mathbf{k}, (2) \mathbf{a} - \mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

$$(3) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12, (4) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -7\mathbf{i} - \mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

$$2. \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{14}, l = 2/\sqrt{14}, m = 1/\sqrt{14}, n = 3/\sqrt{14}$$

3.

$$\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = 2t\mathbf{i} + 9t^2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \frac{d^2\mathbf{f}(t)}{dt^2} = 2\mathbf{i} + 18t\mathbf{j}$$

4.

$$\begin{aligned} \frac{d[a(t)\mathbf{e}(t)]}{dt} &= \frac{da(t)}{dt}\mathbf{e}(t) + a(t)\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt}, \\ \frac{d^2[a(t)\mathbf{e}(t)]}{dt^2} &= \frac{d^2a(t)}{dt^2}\mathbf{e}(t) + 2\frac{da(t)}{dt}\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} + a(t)\frac{d^2\mathbf{e}(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

5. 略

【第2章演習問題】

1.

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= 2t + 1, \quad \frac{dy(t)}{dt} = -2, \quad \frac{dz(t)}{dt} = 2t, \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= 2, \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z(t)}{dt^2} = 2 \\ \mathbf{v}(2) &= 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{a}(2) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k} \end{aligned}$$

2. 点Pの位置ベクトルを $\mathbf{r}$, ベクトル $\mathbf{r}$ が x 軸となす角度を θ , 軌道 $y = 1/x$ の接線が x 軸となす角度を ϕ とする.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + (1/x)\mathbf{j}, \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{1+x^4}/x, \quad \tan\theta = 1/x^2, \quad \tan\phi = -1/x^2 \\ 1/\rho &= 2x^3/(1+x^4)\sqrt{1+x^4} \\ \mathbf{e}_r &= \frac{x^2\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{-\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \mathbf{e}_t = \frac{x^2\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}}{\sqrt{1+x^4}} \end{aligned}$$

より $x = 1$ で

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{-\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$

(1) 軌道座標系では, $a_t = dV/dt = 0$, $a_n = V^2/\rho$ より,

$$\mathbf{v}(x=1) = V\mathbf{e}_t(x=1), \quad \mathbf{a}(x=1) = \frac{V^2}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_n(x=1)$$

(2) 極座標系では, $\mathbf{e}_r(x=1) = \mathbf{e}_n(x=1)$, $\mathbf{e}_\theta(x=1) = -\mathbf{e}_t(x=1)$ の関係を用いると,

$$\mathbf{v}(x=1) = -V\mathbf{e}_\theta(x=1), \quad \mathbf{a}(x=1) = \frac{V^2}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_r(x=1)$$

3. 前問 2 で得た関係式を用いると, 点 A ($x = 0.5$) で

$$\frac{1}{\rho} = \frac{16}{17\sqrt{17}}, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{\sqrt{17}}, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{-4\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{17}}, \quad \mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{\sqrt{17}}, \quad \mathbf{e}_n = \frac{4\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{17}}$$

$$\mathbf{v}_A = \frac{V}{\sqrt{17}}(\mathbf{i} - 4\mathbf{j}), \quad \mathbf{a}_A = \frac{16V^2}{289}(4\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

であり, 点 B ($x = 2$) で

$$\frac{1}{\rho} = \frac{16}{17\sqrt{17}}, \quad \mathbf{e}_r = \frac{4\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{17}}, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{-\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{\sqrt{17}}, \quad \mathbf{e}_t = \frac{4\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{17}}, \quad \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{\sqrt{17}}$$

$$\mathbf{v}_B = \frac{V}{\sqrt{17}}(4\mathbf{i} - \mathbf{j}), \quad \mathbf{a}_B = \frac{16V^2}{289}(\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$$

であるので,

$$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \frac{3V}{\sqrt{17}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}), \quad \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A = \frac{48V^2}{289}(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

4. 軌道の接線が x 軸となす角を ϕ とすると

$$\tan \phi = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{6x}{[1 + (3x^2 - 1)^2]^{3/2}}$$

$$\mathbf{e}_t = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_n = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}$$

より

$$\mathbf{a} = \frac{V^2}{\rho} \mathbf{e}_n = \frac{6xV^2}{[1 + (3x^2 - 1)^2]^{3/2}} \mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{a}(x=1) = \frac{6\sqrt{5}V^2}{25} \mathbf{e}_n, \quad \phi(x=1) = \tan^{-1}(2)$$

5. 軌道の接線が x 軸となす角を ϕ とすると

$$\tan \phi = \frac{dy}{dx} = \beta C \cos \beta x, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{-\beta C \sin \beta x}{[1 + \beta^2 C^2 \cos^2 \beta x]^{3/2}}$$

$$\mathbf{e}_t = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_n = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}$$

より

$$\mathbf{v} = V \mathbf{e}_t, \quad \mathbf{a} = \frac{-\beta^2 C V^2 \sin \beta x}{[1 + \beta^2 C^2 \cos^2 \beta x]^{3/2}} \mathbf{e}_n, \quad \phi = \tan^{-1}(\beta C \cos \beta x)$$

6. $r(t)\theta(t) = c$ の両辺を t で 1 回および 2 回微分すると,

$$\frac{dr}{dt} \theta + r \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \theta + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$$

より

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = -\frac{dr}{dt} \theta = -\frac{c}{r} \frac{dr}{dt}$$

$$v = \pm \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = \pm \frac{dr}{dt} \sqrt{1 + \frac{c^2}{r^2}}$$

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{c}{r} \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$a = \pm \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \pm \sqrt{\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)^2 + \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^2}$$

7. $r = e^{k\theta}$ を微分すると

$$\frac{dr}{dt} = k e^{k\theta} \frac{d\theta}{dt} k \omega r, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = k \omega \frac{dr}{dt} = k^2 \omega^2 r$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = k \omega e^{k\theta}, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \omega e^{k\theta}$$

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = (k^2 - 1) \omega^2 e^{k\theta}$$

$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} = 2k\omega^2 e^{k\theta}$$

$$v = \pm \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \pm \omega \sqrt{1 + k^2} e^{k\theta}$$

$$a = \pm \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \pm \omega^2 (1 + k^2) e^{k\theta}$$

8.

$$\frac{dr}{dt} = 1, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 4t,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 4t, \quad \frac{dz}{dt} = 1, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

より

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_r + 4t^2 \mathbf{e}_\theta + \mathbf{k}, \quad \mathbf{a} = -16t^3 \mathbf{e}_r + 12t \mathbf{e}_\theta$$

9.

$$y = c \tan \theta$$

$$V = v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{c}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dt}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{c}{\cos^2 \theta} \left[2 \tan \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2\theta}{dt^2} \right]$$

10. 楕円の曲率半径と接線の傾きは

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{c^4 + d^4}{[c^4 y^2 + d^4 x^2]^{3/2}}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{d^2}{c^2} \frac{x}{y}$$

であるので,

$$\frac{1}{\rho}(x=c, y=0) = -\frac{c}{d^2}, \quad \frac{1}{\rho}(x=0, y=d) = -\frac{d}{c^2}$$

$$\mathbf{v}_P = V \mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_Q = -V \mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_P = -\frac{cV^2}{d^2} \mathbf{i}, \quad \mathbf{a}_Q = \frac{dV^2}{c^2} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_{Q/P} = \mathbf{v}_Q - \mathbf{a}_P = -V(\mathbf{i} + \mathbf{j}), \quad \mathbf{a}_{Q/P} = \mathbf{a}_Q - \mathbf{a}_P = \frac{V^2}{c^2 d^2} (c^3 \mathbf{i} - d^3 \mathbf{j})$$

11. 地軸北向に $\mathbf{k}$, 赤道の接線方向に $\mathbf{i}$, 地球中心方向に $\mathbf{j}$ とすると

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = v \mathbf{i}, \quad \mathbf{r} = -R \mathbf{j}, \quad \mathbf{g} = g \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = g \mathbf{j} + (R\Omega^2 - 2v\Omega) \mathbf{j}$$

12. 着目点において ,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{i} + \mathbf{k}), \quad \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\phi = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{k}), \\ \mathbf{r} &= \frac{\sqrt{2}}{2}R(-\mathbf{i} + \mathbf{k}), \quad \mathbf{v} = v(-\mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_\phi) = \frac{v}{2}(\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{k}) \end{aligned}$$

よって ,

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}(g + \Omega^2 R - 2v\Omega)\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}g\mathbf{k}, \quad v = 10 \text{ m/s}$$

13.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{A/C} = l\Omega\mathbf{j} - r\omega\mathbf{i} \\ \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{A/C} = -l\Omega^2\mathbf{i} - r\omega^2\mathbf{j} \end{aligned}$$

14.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [v^2]$$

【第3章演習問題】

1.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 &= (a-1)\mathbf{i} + (b-2)\mathbf{j} + (c-1)\mathbf{k} = \mathbf{0} \\ a &= 1, \quad b = 2, \quad c = 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{f} &= (1-2)\mathbf{i} + (2-4)\mathbf{j} + (-3+2)\mathbf{k} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ \mathbf{a} &= \frac{1}{10} \sum \mathbf{f} = -0.1\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j} - 0.1\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \int_0^5 \mathbf{a} dt = [-0.1t\mathbf{i} - 0.2t\mathbf{j} - 0.1t\mathbf{k}]_0^5 = -0.5\mathbf{i} - 0.1\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k} \\ \mathbf{r} &= \int_0^5 \mathbf{v} dt = [-0.05t^2\mathbf{i} - 0.1t^2\mathbf{j} - 0.05t^2\mathbf{k}]_0^5 = -1.25\mathbf{i} - 2.5\mathbf{j} - 1.25\mathbf{k} \\ |\mathbf{v}| &= 1.22 \text{ m/s}, \quad |\mathbf{r}| = 2.9 \text{ m} \end{aligned}$$

3. ばね 1 と 2 の伸びをそれぞれ x_1, x_2 とすると全体の伸びは $x = x_1 + x_2$.
 また , 2 つのばねの力の釣り合い式より ,

$$f = k_1 x_1, \quad f = k_2 x_2, \quad f = kx, \quad x = x_1 + x_2$$

4. 糸の張力を T とすると

$$T \sin \theta - P = 0, \quad T \cos \theta - mg = 0$$

これより

$$P = mg \tan \theta, \quad T = mg / \cos \theta$$

5. ばねに作用する力を f , ばねの伸びを δ とすると

$$2f \cos \frac{\theta}{2} = mg, \quad (l + \delta) \sin \frac{\theta}{2} = \frac{l}{2}, \quad f = k\delta$$

より

$$mg \tan \frac{\theta}{2} + kl \sin \frac{\theta}{2} = kl$$

6. $\theta = \tan^{-1}(\mu_s) = 21.8 \text{ rad}$

7.

$$P = \mu m_B g + \frac{(1 - \mu^2) \sin \theta + 2\mu \cos \theta}{(1 - \mu^2) \cos \theta - 2\mu \sin \theta} m_A g$$

8. $P = mge^{\pi\mu/4}$

9. 糸の張力を T とすると ,

$$m_A a = T - \mu m_A g, \quad m_B a = m_B g - T$$

より

$$a = \frac{m_B - \mu m_A}{m_A + m_B} g$$

10. 車両が受ける遠心力を考慮して , 力とつり合いは

$$N \cos \theta - mg = 0, \quad -N \sin \theta + \frac{mv^2}{\rho} = 0$$

より, $\tan \theta = v^2/\rho g$ の関係式を得る. したがって, この角度より小さい場合には車両は軌道をはずれる. ただし, ここでは簡易な取り扱いをしたが, より正確にはそれぞれの両輪がレールから受ける反力, レール間隔, 車両の重心高さを考慮して力および力のモーメントの平衡条件から, 最適なカント角度を決定しなければならない.

11. 噴流の運動量変化 dp/dt と壁の垂直抗力 f が等しい. また, 単位時間に壁にぶつかる質量は $\rho S v$ である.

$$(a) f = dp/dt = (\rho S v)v = \rho S v^2$$

$$(b) f = dp/dt = (\rho S v)v - (\rho S v)v \cos \theta = \rho S v^2(1 - \cos \theta)$$

12. 式 (3.97) ~ (3.99) において $v_B = 0$, $m_A = m_B = m$, $\alpha = \theta$ とおくと,

$$v_A \cos \theta = v'_A \cos \phi, \quad v'_B \sin \phi = 0$$

より, $\phi = 0$, $v'_A = \cos \theta$ を得る. したがって, 球 C は $\phi = 0$ の方向になければならない.

13. 糸の張力を T とすると

$$T \sin \theta = m l \omega^2 \sin \theta, \quad T \cos \theta = m g$$

より

$$\cos \theta = \frac{g}{l \omega^2}$$

14. 慣性系であるので, 全体が静止している ($V = 0$) とする. また, 外力が作用しないので, 運動量とエネルギーは保存される. 糸が切断された後では,

$$m_A \bar{v}_A + m_B \bar{v}_B = 0, \quad \frac{1}{2} m_A \bar{v}_A^2 + \frac{1}{2} m_B \bar{v}_B^2 = \frac{1}{2} k \delta^2$$

元の運動系に戻すと,

$$v_A = V - \delta \sqrt{\frac{k m_B}{m_A(m_A + m_B)}}, \quad v_B = V + \delta \sqrt{\frac{k m_A}{m_B(m_A + m_B)}}$$

静止系において始めの重心の位置を x_G とし, Δt だけ時間が経ったときの重心の位置を $x_G + \Delta x_G$ とすると,

$$\Delta x_G = \frac{m_A \bar{v}_A \Delta t + m_B \bar{v}_B \Delta t}{m_A + m_B} = 0$$

すなわち，重心も一定速度 V で移動する．

15. 物体 A と B の相対加速度の向きが斜面の方向と等しいことに注意する．

$$a_{Ax} = \frac{m_B \sin \theta \cos \theta}{m_A + m_B \sin^2 \theta} g, \quad a_{Ay} = 0,$$

$$a_{Bx} = -\frac{m_A \sin \theta \cos \theta}{m_A + m_B \sin^2 \theta} g, \quad a_{By} = -\frac{(m_A + m_B) \sin^2 \theta}{m_A + m_B \sin^2 \theta} g$$

16. $T = (M + m)(a + g), \quad R = m(a + g)$

17. 運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \rho C_D v^2$$

の解は

$$v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{\rho C_D}} \tan \sqrt{\frac{\rho C_D g}{m}} t$$

したがって，積分

$$\int_H^h dz = \int_0^\tau v(t) dt$$

より， $z = h$ に到達する時間 τ とそのときの速度 $v(\tau)$ が得られる．

$$v = v(\tau), \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{\rho C_D g}} \cos^{-1} \left[\exp \left(\frac{\rho C_D g (H - h)}{m} \right) \right]$$

18. 弾丸が x にあるときの速度を $v(x)$ 圧力を $p(x)$ とすると

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dx} [v^2(x)] = Sp(x) = \frac{p_0 S}{V_0 + Sx}$$

より $0 \leq x \leq L$ で積分すると

$$v(L) = \left[\frac{2p_0 V_0}{m} \ln \left(1 + \frac{SL}{V_0} \right) \right]^{1/2}$$

19. 質点が皿に衝突する直前の速度は $v_0 = \sqrt{2gh}$ ，衝突直後に一体化した質点と皿の速度は $v = mv_0/(m + M)$ である．衝突の前にばねは $\delta = M/k$ だけ縮んでいるので $k\delta^2/2$ だけのポテンシャルエネルギーを持つ．衝突後，ばねが最大圧縮量 H まで圧縮されたとき質点と皿は一旦静止する．よって，衝突後の

エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 + \frac{1}{2}k\delta^2 = \frac{1}{2}k(\delta+H)^2 - (m+M)gH$$

で表されるので，

$$H = \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \left[1 + \frac{2kh}{(m+M)g} \right]^{1/2}$$

20. 証明は略．

$$X_{11} = \frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1} C, \quad X_{14} = -\frac{2m_2}{m_2 - m_1} C, \quad X_{12} = X_{13} = 0$$

【第4章演習問題】

1.

$$W = \int_C [x^2 y dx + x y^2 dy] = \int_0^1 (x^4 + 2x^6) dx = \frac{17}{35}$$

2. 地表に達した時刻を T とする．運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = -cv - mg$$

を解くことにより，

$$v(T) = \frac{mg}{c} (e^{-cT/m} - 1)$$

また， $dz = v(t)dt$ により

$$\int_h^0 dz = \int_0^T v(t)dt$$

より，落下距離 h と落下所要時間 T の関係は

$$h = \frac{m^2 g}{c^2} \left[\frac{cT}{m} - (1 - e^{-cT/m}) \right]$$

で表される．ただし， h が与えられたとき， T を求めるためには数値計算を必要とする．また，抵抗による仕事は

$$\begin{aligned}
W &= \int_h^0 cvdz = c \int_0^T v^2(t)dt = \frac{m^2 g^2}{c} \int_0^T \left(e^{-ct/m} - 1 \right)^2 dt \\
&= \frac{m^3 g^2}{c^2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - e^{-2cT/m} \right) - 2 \left(1 - e^{-cT/m} \right) + \frac{cT}{m} \right]
\end{aligned}$$

で表される .

3.

$$\begin{aligned}
W_1 &= mgb \sin \theta, \quad W_2 = \mu mgb \cos \theta, \\
v &= \sqrt{2gb(\sin \theta - \mu \cos \theta)}
\end{aligned}$$

4. 質点が円曲面上にあるとき , 質点と中心 O を結ぶ線が鉛直軸となす角度を θ とする . 摩擦係数 f は常に円の接線方向に作用するので , 円の接線方向の運動方程式は

$$mR \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg \sin \theta = -f$$

で表される . したがって , 質点が時間 τ の間に円周に沿って角度 ϕ を運動する間に摩擦力のする仕事は

$$\begin{aligned}
W_2 &= \int_0^\phi f R d\theta = - \int_0^\phi \left[mR \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg \sin \theta \right] R \frac{d\theta}{dt} dt \\
&= - \int_0^\tau \left[\frac{1}{2} mR^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgR \frac{d}{dt} (\cos \theta) \right] dt \\
&= \left[-\frac{1}{2} mR^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgR (\cos \theta) \right]_0^\tau
\end{aligned}$$

$t = 0$ で $d\theta/dt = 0$, $\theta = \pi/2$, $t = \tau$ で $d\theta/dt = \omega$, $\theta = 0$ とすると ,

$$W_2 = -\frac{1}{2} mR^2 \omega^2 + mgR$$

また , 重力による仕事は $W_1 = mgR$ であり , 摩擦が無い場合 , 得られる速度は $R\omega_0 = \sqrt{2gR}$ である . なお , 厳密な解 $\theta(t)$ を得るためには , 円の法線方向の運動方程式

$$mR \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mg \cos \theta = \frac{f}{\mu}$$

の連立を連立して解かなければならない。

5.

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = 2xy$$

が成り立つので保存力である。また，

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

を積分すると

$$U(x, y) = -\frac{1}{4}(x^4 + y^4) - \frac{1}{2}x^2y^2$$

6.

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

が成り立つので保存力である。したがって，ポテンシャルと力のする仕事は

$$U(x, y) = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \text{const.}, \quad W = U(1, 1) - U(0, 0)$$

と書けるが，原点 $(0, 0)$ は特異点であるので原点を含んだ仕事は計算できない。

もし，原点の近傍 (ϵ, ϵ^2) の点から出発すれば通常の計算ができる。

7. 完全弾性衝突直後の質点 B の速度は $2m_A v_A / (m_A + m_B)$ であるので，質点 B の運動エネルギーとばねのポテンシャルとの関係式より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_B \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B} \right)^2 v_A^2 &= \frac{1}{2} k \delta_{max}^2 \\ \delta_{max} &= \frac{2m_A v_A}{m_A + m_B} \sqrt{\frac{m_B}{k}} \end{aligned}$$

8. 完全非弾性衝突であるので，衝突直後の砂袋の速度は $mv / (m + M)$ である。ロープの最大振れ角を θ_{max} とすると，

$$\begin{aligned} (m + M)gl(1 - \cos \theta_{max}) &= \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{m + M} \right)^2 v^2 \\ \theta_{max} &= \cos^{-1} \left[1 - \frac{m^2 M v^2}{2gl(m + M)^3} \right] \end{aligned}$$

9. δ だけ圧縮された位置からの移動距離を x とすると

$$\frac{1}{2}k\delta^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \nu mgx$$

再び速度が 0 となるときの移動量は最大であり

$$x_{max} = \frac{k\delta^2}{2\mu mg}$$

10.

(1)

$$K = \frac{1}{2}m \left(l \frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad U = \frac{1}{2}k(c\theta)^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{d\theta}{dt} + kc^2\theta \frac{d\theta}{dt} - mgl \sin\theta \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + kc^2\theta - mgl \sin\theta = 0$$

(2) $\sin\theta \approx \theta$ として、固有振動数は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kc^2 - mgl}{ml^2}}$$

となる。ここで、根号内が負、すなわち $c^2 \leq mgl/k$ のとき振動は不安定となる。

【第 5 章演習問題】

1. 接触点で周方向速度が等しい。

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1, \text{ 時計方向}$$

2. 線分 OA の角速度を Ω とすると、点 A の速度の大きさは $v_A = (r + R)\Omega$ である。ところが、接触点の接線方向速度は $(r + R)\Omega - r\omega = 0$ でなければならない。よって、

$$v_A = r\omega, \quad a_A = \frac{v_A^2}{r + R} = \frac{r^2\omega^2}{r + R}$$

3. 剛体棒の端点 A, B の速度ベクトル v_A, v_B と加速度ベクトル a_A, a_B

の向きは、それぞれ床と斜面の向きに等しくなければならないことに注意する。
剛体棒の重心 G の回りの角速度を $\omega = \omega \mathbf{k}$ 、角加速度を $\alpha = \alpha \mathbf{k}$ とすると、

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_G + \omega \times \mathbf{r}_{A/G}, \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_G + \omega \times \mathbf{r}_{B/G}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_G + \alpha \times \mathbf{r}_{A/G} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{A/G})$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + \alpha \times \mathbf{r}_{B/G} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{B/G})$$

および v_B と a_B を未知量として

$$\mathbf{v}_A = v \mathbf{i}, \quad \mathbf{a}_A = a \mathbf{i}$$

$$\mathbf{v}_B = v_B (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}), \quad \mathbf{a}_B = a_B (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})$$

$$\mathbf{r}_{A/G} = \frac{l}{2} (-\cos \phi \mathbf{i} - \sin \phi \mathbf{j}), \quad \mathbf{r}_{B/G} = \frac{l}{2} (\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j})$$

から ω, α, v_B, a_B を決定する。

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \phi)} \frac{v}{l}, \quad v_B = \frac{\cos \phi}{\cos(\theta - \phi)} v \\ \alpha &= \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \phi)} \frac{a}{l} + \frac{\sin^2 \theta [\sin \phi \cos(\theta - \phi) - \sin \theta]}{\cos \phi \cos^3(\theta - \phi)} \frac{v^2}{l^2} \\ a_B &= \frac{\cos \phi}{\cos(\theta - \phi)} a - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^3(\theta - \phi)} \frac{v^2}{l} \end{aligned}$$

4. 前問 3 において、 $v = 0$ 、 $a = a_A$ とする。

5. 各部材に対して相対運動の概念を用い、

$$\mathbf{v}_A = (\Omega \mathbf{k}) \times \mathbf{r}_{A/O}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\omega_{AB} \mathbf{k}) \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + (\omega_{BC} \mathbf{k}) \times \mathbf{r}_{C/B} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a}_A = (\Omega \mathbf{k}) \times [(\Omega \mathbf{k}) \times \mathbf{r}_{A/O}]$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\omega_{AB} \mathbf{k}) \times [(\omega_{AB} \mathbf{k}) \times \mathbf{r}_{B/A}]$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{v}_B + (\omega_{BC} \mathbf{k}) \times [(\omega_{BC} \mathbf{k}) \times \mathbf{r}_{C/B}] = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}_{A/O} = l_1 (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})$$

$$\mathbf{r}_{B/A} = l_1 (\cos \beta \mathbf{i} - \sin \beta \mathbf{j})$$

$$\mathbf{r}_{C/B} = l_3(\cos \phi \mathbf{i} - \sin \phi \mathbf{j})$$

$$\sin \beta = \frac{1}{l_2}(l_1 \sin \theta - l_3 \sin \phi), \quad \cos \beta = \frac{1}{l_2} \sqrt{l_2^2 - (l_1 \sin \theta - l_3 \sin \phi)^2}$$

より未知量を決定する．ただし， β は部材 AB が水平軸となす角度である．

$$\omega_{AB} = -\frac{\sin(\theta + \phi)}{\sin(\phi - \beta)} \frac{\Omega l_1}{l_2}, \quad \omega_{BC} = -\frac{\sin(\theta + \beta)}{\sin(\phi - \beta)} \frac{\Omega l_1}{l_3},$$

$$\alpha_{AB} = -\frac{\cos(\theta - \phi)}{\sin(\phi - \beta)} \frac{\Omega^2 l_1}{l_2} - \frac{1}{\tan(\phi - \beta)} \omega_{AB}^2 - \frac{1}{\sin(\phi - \beta)} \frac{\omega_{BC}^2 l_3}{l_2},$$

$$\alpha_{BC} = \frac{\cos(\theta + \beta)}{\sin(\phi + \beta)} \frac{\Omega^2 l_1}{l_3} - \frac{1}{\sin(\phi - \beta)} \frac{\omega_{AB}^2 l_2}{l_3} + \frac{1}{\tan(\phi - \beta)} \omega_{BC}^2$$

6. 点 P に対応する点 Q を剛体棒 OA 上に設けたとき，相対速度ベクトル $\mathbf{v}_{Q/P}$ および相対加速度ベクトル $\mathbf{a}_{Q/P}$ の向きが剛体棒 OA の向きに等しくなければならないことに注意する． $\overline{OP} = r = l \sin \theta / \sin \phi$ とし， $\mathbf{v}_{Q/P}$ ， $\mathbf{a}_{Q/P}$ ， ω_{OA} ， α_{OA} を未知量とする．

$$\mathbf{v}_P = (-\Omega \mathbf{k}) \times \mathbf{r}_{P/C}, \quad \mathbf{v}_Q = (\omega_{OA} \mathbf{k}) \times \mathbf{r}_{Q/O}$$

$$\mathbf{a}_P = (-\Omega \mathbf{k}) \times \mathbf{v}_P, \quad \mathbf{a}_Q = (\alpha_{OA} \mathbf{k}) \times \mathbf{r}_{Q/O} + (\omega_{OA} \mathbf{k}) \times \mathbf{v}_Q$$

$$\mathbf{v}_{Q/P}(\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) = \mathbf{v}_{Q/P}, \quad \mathbf{a}_{Q/P}(\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) = \mathbf{a}_{Q/P}$$

より，

$$\omega_{OA} = \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \cos(\phi + \theta) \Omega, \quad \alpha_{OA} = \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \sin(\phi - \theta) \Omega^2$$

7. 剛体棒の端点 A の床面に垂直な方向の速度成分 $(\mathbf{v}_A)_y$ と加速度成分 $(\mathbf{a}_A)_y$ が 0 でなければならないことに注意する．

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{B/O}, \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{B/O}, \quad \mathbf{v}_O = (\omega r) \mathbf{i}, \quad \mathbf{a}_O = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}, \quad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$$

より

$$\omega_{AB} = -\omega \frac{r \cos \phi}{l \cos \theta}, \quad \alpha_{AB} = -\omega^2 \frac{r \sin \phi}{l \cos \theta} + \omega^2 \frac{r^2 \cos^2 \phi}{l^2 \cos^2 \theta} \tan \theta$$

ただし，上式で $r/l = \sin \theta / (1 + \sin \phi)$ である．

8. (x, y, z) 座標における点 P の速度ベクトルと加速度ベクトルは直ちに

$$\mathbf{v}_P = \omega r \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{a}_P = -\omega^2 r \mathbf{e}_x$$

で表される．また， x 軸方向の単位ベクトルと z 軸方向の単位ベクトルが分かっているので

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = (m_z n_x - m_x n_z) \mathbf{i} + (n_z l_x - n_x l_z) \mathbf{j} + (l_z m_x - m_z l_x) \mathbf{k}$$

となるので，これらを上の式に用いると直角座標成分で表される．

9. Z 軸と z 軸の交点を C， Z 軸方向に $\mathbf{k}$ ， Z 軸方向に $\mathbf{i}$ を設ける．円板は回転座標系の中で回転しているので，特に加速度ベクトルに注意する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \Omega \mathbf{k} + \omega \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_P = l \mathbf{i} - r \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\Omega \mathbf{k}) \times (\omega \mathbf{i}), \\ \mathbf{v}_P &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = (\Omega l + \omega r) \mathbf{j} \\ \mathbf{a}_P &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) = -\Omega(\Omega l + 2\omega r) \mathbf{i} + \omega^2 r \mathbf{k} \end{aligned}$$

10. 前問と同様に，剛体棒 OA は回転座標系 $(O; y, z)$ の中で回転していることに注意する．

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= l(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{k}), \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_z + \omega_x, \quad \boldsymbol{\alpha} = \omega_z \times \omega_x \\ \mathbf{v}_A &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A = -\omega_z l \cos \theta \mathbf{i} - \omega_x l \sin \theta \mathbf{j} + \omega_x l \cos \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{a}_A &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A) \\ &= 2\omega_x \omega_z l \sin \theta \mathbf{i} - (\omega_x^2 + \omega_z^2) l \cos \theta \mathbf{j} - \omega_x^2 l \sin \theta \mathbf{k} \end{aligned}$$

【第 6 章演習問題】

1. それぞれの三角形の質量と重心位置は直ぐに分かるので，同じ質量を持つ 2 つの質点の重心を求める．

$$(a) (x_G, y_G) = \left(\frac{2a}{3}, \frac{b}{3} \right), \quad (b) (x_G, y_G) = \left(\frac{5a+b}{6}, \frac{4b-a}{6} \right)$$

2. 支持反力を $O_x \mathbf{i} + O_y \mathbf{j}$ と表すと

$$f = \frac{\rho b g (a \cos \theta - b \sin \theta)}{2 \sin(\theta + \phi)}$$

$$O_x = \frac{\rho b g (a \cos \theta - b \sin \theta) \cos \phi}{2 \sin(\theta + \phi)}, \quad O_y = \rho a b g - \frac{\rho b g (a \cos \theta - b \sin \theta) \sin \phi}{2 \sin(\theta + \phi)}$$

3. 点 A, B, C の反力をそれぞれ R_A (右向き), R_B (上向き), R_C (左向き) とすると

$$R_A = R_C = \frac{mg}{\tan \theta}, \quad R_B = 2mg, \quad \theta = \cos^{-1} \left(\frac{h}{2r} - 1 \right), \quad (2r < h < 4h)$$

4.

$$f = \int_0^h [\rho_0 g (H - z) + p_0] l dz - p_0 h l = \frac{1}{2} \rho_0 g h l (2H - h)$$

5. 三角形物体の下端から測って, 水に沈んだ部分の長さを h , 重心の位置を z_G , 浮力中心の位置を z_C とする. ただし, $\rho/\rho_0 < 1$.

(a) の場合:

$$z_G = \frac{\sqrt{3}a}{6}, \quad z_C = \frac{(3\sqrt{3}a - 4h)h}{6\sqrt{3}a - 6h}, \quad h = \frac{\sqrt{3}a}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} \right)$$

(b) の場合:

$$z_G = \frac{\sqrt{3}a}{3}, \quad z_C = \frac{\sqrt{3}a}{3} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}, \quad h = \frac{\sqrt{3}a}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$$

(注) ρ と ρ_0 の比によって現象は異なる. また, 傾いたとき水に沈んだ部分の形が変わる. 説明が長くなるので省略するが, 考察してみると面白い.

6. 水銀柱の平衡位置を原点 O として液面変位を $z(t)$ 軸とすると, 運動方程式は

$$\rho A l \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\rho A g z(t),$$

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \omega_n^2 = 0, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

となる. ただし, ρ は水銀の密度, A は液柱の断面積. これは 1 自由度系の振動方程式であり, $t = 0$ で $z = h$, $dz/dt = 0$ とすると, 解は

$$z(t) = h \cos(\omega_n t)$$

で表され，原点 O を中心として振幅が h の振動となる．

7.

(1) 分布荷重の全荷重量 W と荷重中心の位置 $x = x_G$ は

$$W = \int_c^l w_0(x-c)dx = \frac{w_0}{2}(l-c)^2, \quad x_G = \frac{1}{3}(2l+c)$$

である．いま，支点 A の位置を $x = s$ とすると，力と支点 A に関する力のモーメントの平衡条件は

$$O_y + A_y - W - mg = 0, \quad -cO_y - W(x_G - c) - mg\left(\frac{l}{2} - c\right) = 0$$

よって，

$$O_y = -\frac{2(l-c)}{3c}W - \frac{l-2c}{2c}mg, \quad A_y = \frac{2l+c}{3c}W + \frac{l}{2c}mg$$

ところが，剛体棒が傾かないためには $O_y > 0$ ，すなわち

$$2(l-c)^3w_0 + 3(l-2c)mg < 0$$

でなければならない．

(2) 分布荷重の全荷重量 W と荷重中心の位置 $x = x_G$ は

$$W = \int_0^l w_0x^2dx = \frac{w_0}{3}l^3, \quad x_G = \frac{1}{W} \int_0^l w_0x^3dx = \frac{3l}{4}$$

である．力と支点 AO に関する力のモーメントの平衡条件は

$$O_y + A_y - W - mg = 0, \quad cA_y - \frac{3l}{4}W - \frac{l}{2}mg = 0$$

よって，

$$O_y = \frac{4c-3l}{4c}W + \frac{2c-l}{2c}mg, \quad A_y = \frac{3l}{4c}W + \frac{l}{2c}mg$$

したがって，剛体棒は傾かないためには

$$(4c-3l)l^3w_0 + 6(2c-l)mg > 0$$

でなければならない。

8. 以下の解答で矢印は支持反力の向き，C は圧縮部材，T は引張り部材，0 は0力部材を表す。

(1)

$$\begin{aligned} O_x &= 4.0 \text{ kN}(\leftarrow), \quad O_y = 2.0 \text{ kN}(\uparrow), \quad A_x = 4.0 \text{ kN}(\rightarrow), \quad A_y = 0, \\ F_{OA} &= 4.0 \text{ kN}(T), \quad F_{AB} = 5.7 \text{ kN}(C), \quad F_{OD} = 2.8 \text{ kN}(T), \\ F_{OB} &= 2.0 \text{ kN}(T), \quad F_{BD} = 2.0 \text{ kN}(C), \quad F_{CD} = 2.0 \text{ kN}(T), \\ F_{BC} &= 2.8 \text{ kN}(C) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} O_y &= 1.33 \text{ kN}(\uparrow), \quad C_y = 0.67 \text{ kN}(\uparrow), \quad O_x = C_x = 0, \\ F_{OA} &= 1.33 \text{ kN}(T), \quad F_{AB} = 0.67 \text{ kN}(T), \quad F_{BC} = 0.67 \text{ kN}(T), \\ F_{OE} &= 1.89 \text{ kN}(C), \quad F_{AE} = 0.67 \text{ kN}(C), \quad F_{AD} = 0.94 \text{ kN}(T), \\ F_{ED} &= 1.33 \text{ kN}(C), \quad F_{BD} = 0 \text{ kN}(0), \quad F_{CD} = 0.94 \text{ kN}(C) \end{aligned}$$

9. $I_G = I_C = \pi ab(a^2 + b^2)/4$

10.

$$I_G = I_C = 2\rho \int_{-\sqrt{3}a/6}^{-\sqrt{3}x+\sqrt{3}a/3} dx \int_0^{a/2} (x^2 + y^2) dy = \frac{1}{12} ma^2$$

11. 支持反力を $\mathbf{O} = O_x \mathbf{i} + O_y \mathbf{j}$ ，重心の加速度を $\mathbf{a}_G = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$ ，角加速度を $\alpha = \alpha k$ とすると，運動方程式は

$$m\mathbf{a}_G = \mathbf{O} - mg\mathbf{j}, \quad I_G \alpha = \mathbf{r}_{O/G} \times \mathbf{O}$$

また，相対加速度の関係式より $\mathbf{a}_O = \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_{O/G} = \mathbf{0}$ ．よって，

$$\alpha = -\frac{3g}{2l} \cos \theta, \quad O_x = \frac{3mg}{4} \cos \theta \sin \theta, \quad O_y = \frac{mg}{4} (4 - 3 \cos^2 \theta)$$

また，エネルギー保存則

$$\frac{l}{2} (1 + \sin \theta) mg = \frac{1}{3} ml^2 \omega^2$$

より,

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}(1 + \sin \theta)$$

12. 支持点 A の反力を $A_y \mathbf{j}$, 支持点 B の反力を $-B_y \mathbf{i}$, 重心の加速度を $\mathbf{a}_G = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$, 角加速度を $\alpha = \alpha \mathbf{k}$ とすると, 運動方程式は

$$m\mathbf{a}_G = A_y \mathbf{j} - B_y \mathbf{i} - mg \mathbf{j},$$

$$I_G \alpha = \mathbf{r}_{A/G} \times (A_y \mathbf{j}) + \mathbf{r}_{B/G} \times (-B_y \mathbf{i})$$

$$\mathbf{r}_{A/G} = \frac{1}{2}(c \sin \theta - b \cos \theta) \mathbf{i} - \frac{1}{2}(c \cos \theta + b \sin \theta) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{B/G} = \frac{1}{2}(c \sin \theta + b \cos \theta) \mathbf{i} - \frac{1}{2}(c \cos \theta - b \sin \theta) \mathbf{j}$$

また, 点 A の加速度は水平方向成分, 点 B の加速度は鉛直方向成分しか持たないことに注意すると, a_A と a_B を未知量として, 相対速度の概念より

$$a_A \mathbf{i} = \mathbf{a}_G + \alpha \times \mathbf{r}_{A/G}, \quad a_B \mathbf{j} = \mathbf{a}_G + \alpha \times \mathbf{r}_{B/G}$$

を利用すると

$$\alpha = \frac{3g}{2} \frac{c \sin \theta - b \cos \theta}{b^2 + c^2 - 3bc \sin \theta \cos \theta}$$

$$a_{Gx} = \frac{3g}{4} \frac{bc - (b^2 + c^2) \sin \theta \cos \theta}{b^2 + c^2 - 3bc \sin \theta \cos \theta}, \quad a_{Gy} = -\frac{3g}{4} \frac{(c \sin \theta - b \cos \theta)^2}{b^2 + c^2 - 3bc \sin \theta \cos \theta}$$

13. 衝突直後の棒の重心 G の速度を v_G , 角速度を ω , 衝突端 A の速度を v_A , 衝突後の小球の速度を v' , 反発係数を e とすると, 支点に関する角運動量の式および衝突過程の式は

$$m_0 v l = m_0 v' l + \frac{1}{2} m l v_G + I_G \omega, \quad v_A - v' = e v$$

$$v_A = l \omega, \quad v_G = \frac{1}{2} l \omega, \quad I_G = \frac{1}{2} m l^2$$

で表される. よって,

$$\omega = \frac{3(1+e)m_0}{m+3m_0} \frac{v}{l}, \quad v' = \frac{3m_0 - em}{m+3m_0} v$$

14. (1) 2 つの棒が運動開始した直後にはまだばねは圧縮されない. 点 O の支

持反力を $\mathbf{O} = O_x \mathbf{i} + O_y \mathbf{j}$, 点 B の支持反力を $\mathbf{B} = B_y \mathbf{j}$, 棒 OA の重心 P と AB の重心 Q の加速度をそれぞれ $\mathbf{a}_P = a_{Px} \mathbf{i} + a_{Py} \mathbf{j}$, $\mathbf{a}_Q = a_{Qx} \mathbf{i} + a_{Qy} \mathbf{j}$, 角加速度をそれぞれ $\alpha_{OA} = \alpha_{OA} \mathbf{k}$, $\alpha_{AB} = \alpha_{AB} \mathbf{k}$, また棒 AB から棒 OA に及ぼす力を $\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j}$ とすると , それぞれの棒の重心の並進運動とその周りの回転運動に対する方程式は

$$m\mathbf{a}_P = \mathbf{O} - mg\mathbf{j} + \mathbf{f}$$

$$m\mathbf{a}_Q = \mathbf{B} - mg\mathbf{j} - \mathbf{f}$$

$$I_G \alpha_{OA} = \mathbf{r}_{O/P} \times \mathbf{O} + \mathbf{r}_{A/P} \times \mathbf{f}$$

$$I_G \alpha_{AB} = -\mathbf{r}_{A/Q} \times \mathbf{f} + \mathbf{r}_{B/Q} \times \mathbf{B}$$

点 O の加速度が 0 , 点 B の加速度が水平面に沿うことに注意して , 少し長い計算を行う .

$$\alpha_{AB} = -\alpha_{OA} = \frac{2mgl \cos \theta}{4I_G + ml^2(1 + 4 \sin^2 \theta)}$$

ただし , ばねが圧縮され始めてからの計算は極めて複雑になる .

(2) 始めに持っていた位置エネルギーが全てばねのポテンシャルエネルギーに変換されるので , 角速度が 0 となる角度を θ_0 とするとき ,

$$\delta_{max} = \sqrt{\frac{2mgl(\sin \theta - \sin \theta_0)}{k}}$$

もちろん , ばね定数が小さいときは , 棒が水平になるまで圧縮される .

$$\delta_{max} = 2l(1 - \cos \theta)$$

15. 質点と回転系 (ホイールとシリンダー) の運動方程式は

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = Tr, \quad M \frac{d^2 z}{dt^2} = Mg - T, \quad z = R\theta, \quad I = \frac{1}{2}(2m_1 R^2 + m_2 r^2)$$

より , $z(t)$ について

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = Q, \quad Q \equiv \frac{Mr^2 g}{I + Mr^2}$$

と表される . $t = 0$ で $z = 0$, $dz/dt = 0$ を満たす解は

$$z(t) = \frac{1}{2}Qt^2$$

であるので, $z = h$ において, (1) $v = Q\tau$, (2) $a = Q$, (3) $\tau = \sqrt{2h/Q}$.

16. 箱形物体の左下の突起に作用する垂直抗力を R_1 , 右下の突起に作用する垂直抗力を R_2 とすると, 物体が前にも後ろにも転倒せずに静止状態できるためには, 重心 G に関する力と力のモーメントの式は

$$R_1 + R_2 - mg = 0, \quad (h - 2z)f - (b + \mu_s h)R_1 + (b - \mu_s h)R_2 = 0$$

が成り立たなければならない. よって

$$R_1 = \frac{b - \mu_s h}{2b}mg + \frac{h - 2z}{2b}f, \quad R_2 = \frac{b + \mu_s h}{2b}mg - \frac{h - 2z}{2b}f$$

を得る. よって,

$$\frac{h}{2} - (b + \mu_s h)\frac{mg}{2f} < z < \frac{h}{2} + (b - \mu_s h)\frac{mg}{2f}$$

のとき $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ となって物体は転倒しない. 一方, 運動開始直後において運動方程式

$$ma_x = f - \mu_k R_1 - \mu_k R_2, \quad ma_y = R_1 + R_2 - mg$$

$$I_G \alpha = -\frac{1}{2}(2z - h)f - \frac{1}{2}(b + \mu_k h)R_1 + \frac{1}{2}(b - \mu_k h)R_2$$

が成り立つ. この場合にも,

$$\frac{h}{2} - (b + \mu_k h)\frac{mg}{2f} < z < \frac{h}{2} + (b - \mu_k h)\frac{mg}{2f}$$

のとき $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ であるので物体は転倒しない. また, このとき, 重心の加速度は $a_x = (f - \mu_k mg)/m$ となる.

17. 棒 BC の重心を G_1 , 棒 OA の重心を G_2 , 端点 C が棒 OA から受ける反力を R とする. 反力 R は棒 OA に垂直である. また, 棒 OA の上に点 C と同じ位置に点 C' を設ける. 点 C と点 C' の相対加速度ベクトルが棒 OA と同じ向きであることに注意する.

$$\overline{BC} = l, \quad \overline{OC'} = l', \quad l \sin \phi = l' \cos \theta$$

$$\mathbf{a}_C = \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B}, \quad \mathbf{a}_{C'} = \boldsymbol{\alpha}_{OA} \times \mathbf{r}_{C'/O}$$

$$I\boldsymbol{\alpha}_{BC} = \mathbf{r}_{G1/B} \times (-mg\mathbf{j}) + \mathbf{r}_{C/B} \times \mathbf{R},$$

$$I\boldsymbol{\alpha}_{OC'} = \mathbf{r}_{G2/O} \times (-mg\mathbf{j}) + \mathbf{r}_{C'/O} \times (-\mathbf{R}),$$

を用いる．ここで，点 C と点 C' の相対加速度ベクトルについて

$$\mathbf{a}_{C/C'} = \mathbf{a}_C - \mathbf{a}_{C'} = a_{C/C'}[\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}]$$

が成り立たなければならないことに注意する．ただし， $a_{C/C'}$ は未知量である．

また， $I = ml^2/3$ である．以上より，

$$\alpha_{BC} = -\frac{mgl}{2I} \sin \phi, \quad \alpha_{OA} = -\frac{mgl}{2I} \cos \theta \sin(\theta - \phi)$$

18. 衝突後の板の重心の速度を u ，角速度を ω ，重心に関する慣性モーメントを $I_G = m(a^2 + b^2)/12$ とすると，

$$\frac{b}{2}(mv) = \frac{1}{2}(mu)\sqrt{a^2 + b^2} + I_G\omega, \quad u = \frac{1}{2}\omega\sqrt{a^2 + b^2}$$

より

$$\omega = \frac{3a}{2(a^2 + b^2)}$$

19. 棒 AB の重心を G，円板と水平面の接点を Q とする．また，点 B に作用する力を N_B ，点 Q に作用する力を N_Q ，点 A において円板から棒に作用する力を $\mathbf{R}$ とする． I_G と I_O は棒と円板の重心周りの慣性モーメントである．棒と円板の回転および並進の運動方程式は

$$I_G\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}_{B/G} \times \mathbf{N}_B + \mathbf{r}_{A/G} \times \mathbf{R}$$

$$m\mathbf{a}_G = \mathbf{N}_B + \mathbf{R} - mg\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/G}$$

$$\mathbf{a}_B = a_B\mathbf{i} = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/G}$$

$$I_O\boldsymbol{\alpha}_O = \mathbf{r}_{A/O} \times (-\mathbf{R}) + \mathbf{r}_{Q/O} \times \mathbf{N}_Q$$

$$M\mathbf{a}_O = \mathbf{N}_Q - \mathbf{R}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha}_O \times \mathbf{r}_{A/O}, \quad \mathbf{a}_O = -\alpha_O r \mathbf{i}$$

で表される．棒と水平面のなす角度を ϕ とすると $l \sin \phi = r(1 + \sin \theta)$ である．
以上の諸式より，

$$\begin{aligned}\alpha_{AB} &= \frac{lr^2 \cos^2 \theta \cos \phi}{2J} mg \\ J &= I_G r^2 \cos^2 \theta + I_O l^2 \sin^2 \phi \\ &\quad + \frac{ml^2 r^2}{4(m+M)} [(m \cos^2 \phi + M) \cos^2 \theta + 4M \sin \theta \cos \phi \sin(\theta + \phi)]\end{aligned}$$

【第7章演習問題】

1. 剛体棒が反時計方向に $\delta\theta$ だけ仮想変位したとする．このときばねの復元力と重力のする仮想仕事は

$$\delta W = (k\delta)a\delta\theta - (mg)l\delta\theta = 0$$

である．よって， $a = mgl/ka\delta$

2.

$$\begin{aligned}L = K - U &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + (r\omega)^2 \right], \quad (U = 0) \\ m \frac{d^2 r}{dt^2} - mr\omega^2 &= 0\end{aligned}$$

3. 運動エネルギーを K ，ポテンシャルを U とし， $dx/dt = \dot{x}$ とおくと

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad U = \frac{1}{2} b x^2 + \frac{1}{3} c x^3 \\ L = K - U &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} b x^2 - \frac{1}{3} c x^3\end{aligned}$$

より

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - bx - cx^2 = 0$$

4. 一般化された座標を $q = x$ とすると，一般化された運動量は $p = \partial L / \partial \dot{x} = m\dot{x}$ ，一般化された速度は $\dot{q} = \dot{x}$ であるから，

$$H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} b x^2 + \frac{1}{3} c x^3$$

5. これは第3章で述べたように中心力 $f = GmM/r^2$ を受けて描く軌道の一つである．今の場合，楕円の長軸および短軸の長さは

$$a = \frac{1}{1-\epsilon^2} \frac{h^2}{GM}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \frac{h^2}{GM}$$

であり，運動エネルギーとポテンシャルはそれぞれ $K = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$ ， $U = -GmM/r$ であらわされるので，

$$L = K - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{GmM}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{GmM}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

6. バネの自然長さを l とすると，原点にあった質点が (x, y) に変位したとき，運動エネルギーとポテンシャルは

$$K = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

$$U = \frac{k}{2} \left[l - \sqrt{(l-x)^2 + y^2} \right]^2 + \frac{k}{2} \left[l - \sqrt{x^2 + (l-y)^2} \right]^2$$

$$+ \frac{k}{2} \left[l - \sqrt{(l+x)^2 + y^2} \right]^2 + \frac{k}{2} \left[l - \sqrt{x^2 + (l+y)^2} \right]^2$$

で表される．ところが， $x/l \ll 1$ ， $y/l \ll 1$ の微小変位では

$$U = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$$

と近似できるので，運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2kx = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2ky = 0$$

のように簡単に表される．

7.

$$K = \frac{1}{2}m_1 \left(l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(l_1 \frac{d\theta_1}{dt} + l_2 \frac{d\theta_2}{dt} \right)^2$$

$$U = m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g [l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2)]$$

より，運動方程式は

$$m_1 l_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 - m_2 g \sin \theta_2 = 0$$

$$m_2 \left(l_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + l_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} \right) + m_2 g \sin \theta_2 = 0$$

8.

$$L = K - U = \frac{1}{2} I_C \left(\epsilon \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mg\epsilon(1 - \cos \theta), \quad I_C = \frac{1}{2} m r^2 + m \epsilon^2$$

$$p = I_C \epsilon^2 \frac{d\theta}{dt}, \quad H = \frac{1}{2} I_C \epsilon^2 \dot{\theta}^2 + mg\epsilon(1 - \cos \theta)$$

より, 運動方程式は

$$I_C \epsilon^2 \ddot{\theta} + mg\epsilon \sin \theta = 0$$

9. バネの振れ角を q_1 , 伸び変位を q_2 とすると

$$L = \frac{1}{2} m \left(l \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} k q_2^2 - mg[l - (l + q_2) \cos q_1]$$

$$p_1 = ml \left(l \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} \right), \quad p_2 = m \left(l \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} \right)$$

より,

$$H = \frac{1}{2} m \left(l \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} k q_2^2 + mg[l - (l + q_2) \cos q_1]$$

$$ml^2 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{d^2 q_1}{dt^2} + k q_2 + mg(l + q_2) \sin q_1 = 0$$

$$ml \frac{d^2 q_1}{dt^2} + m \frac{d^2 q_1}{dt^2} + mg \cos q_1 = 0$$

(以上)