微分積分で何を学んだか（学習を終わって振り返る）

微分積分の学習目的は大きく分けて、微分積分の計算力を身につけることと、それらの根拠である数学理論を理解することです。そのうちさまざまな分野における微分積分の応用において必要となる計算力は問題練習を繰り返すことによって身につけることができます。一方、数学理論は細かなところにまで注意して厳密に進められますので、ときには何を学んでいるのか見失うことも起りがちです。したがって、微分積分の学習が一通り終わった段階で、何を学んだかを振り返ってみることは、学習の成果を確実にするうえで大切です。細かなことは忘れてとしても何を学んだのかを確認しておくことは学習の成果に自信を与えてくれるに違いありません。このファイルはそうした目的でつくられています。すべてを学ぶことができなかった人についても、学び残したものが何であるかの概観をつかむことは微分積分についてのいっそうの自信を与えてくれるでしょう。

1-1. 個数、もしくは、順番を表す $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 100, \dots, 1000, \dots$ を**自然数**という。自然数は限りなくたくさんある（無限）。2つの自然数 n, m で表せる分数 $\frac{m}{n}$ は、分子 m を分母 n で割り算することによって、小数で表すことができるが、ある桁で割り切れて止まるもの（**有限小数**という）と、何桁かの数の並びが無限に繰り返して続くもの（**無限循環小数**という）とがある。有限小数も、0が無限に繰り返して続く無限循環小数と考えることができる。2つの自然数 n, m で表せる分数 $\frac{m}{n}$ は無限循環小数（有限小数も含めた意味での）になるということには例外が無い。逆に、正の無限循環小数は分母も分子も自然数となる分数で表すことができる。

1-2. **整数**とは、自然数と、数0と、自然数にマイナス符号をつけた数を合わせたものである。整数 m を自然数 n で割った数 $\frac{m}{n}$ を**有理数**という。有理数は正の有理数と負の有理数と0から成っている。有理数であれば（プラスマイナスの符号付の）無限循環小数であり、無限循環小数であれば有理数である。無限循環しない小数で表せる数を**無理数**という。たとえば、 $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$ や $\pi = 3.141516\dots$ は無理数である。

1-3. 小数で表すことができる数を**実数**という。実数は有理数と無理数とからなる。

実数は、また、正の実数と負の実数と0からなる。整数の全体は無限集合であるが、整数の全体に番号を付けることができる。無限集合で全体に番号を付けることができるものを**可付番無限集合**であるという。有理数の全体は可付番無限集合である。実数の全体および無理数の全体は可付番無限集合ではない。

1-4. 文字式における文字は、数を一般的に表すものである。これを**代数**という。数学ではさまざまな数学記号を用いるが、それによって一般的で論理的な、しかも、いっそう複雑な思考を可能にする。

1-5. 数の計算の基本は

$$\begin{array}{ll}
 (1) & a + b = b + a, \\
 (2) & a \times b = b \times a, \\
 (3) & a + 0 = a, \\
 (4) & a \times 1 = a, \\
 (5) & (a + b) + c = a + (b + c), \\
 (6) & (a \times b) \times c = a \times (b \times c), \\
 (7) & a(b + c) = ab + ac, \\
 (8) & (a + b)c = ac + bc
 \end{array}$$

であり、これらを用いて性質

$$(9) \quad a \times 0 = 0, \quad (10) \quad (-a) \times (-b) = a \times b$$

などは導くことができる。減算は和の逆演算であり、 $b - a$ とは、 $a + x = b$ をみたす数 x のことである。また、除算は積の逆演算であり、 $b \div a$ (あるいは、 $\frac{b}{a}$) とは、 $a \times x = b$ をみたす数 x のことである。したがって、0で割ることはできない。

1-6. 多項式は自然数と同じように加算、減算、乗算、余りのある除算を考えることができる。多項式 $P(x)$ が1次式 $x - \alpha$ で割れるための必要十分条件は α が方程式 $P(x) = 0$ の解であることである。これを**因数定理**という。

1-7. すべての自然数 n について、

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n!}{k!(n-k)!}a^k b^{n-k} + \cdots + b^n$$

がなりたつ。これを**2項定理**という。

1-9. 実数の集合 A に属する実数 a は、 A に属するすべての実数 x について $x \geq a$ をみたすとき、 A の**最小値** minimum という。また、実数の集合 A に属する実数 a

は、 A に属するすべての実数 x について $x \leq a$ をみたすとき、 A の**最大値** maximum という。最大値や最小値が存在しない実数の集合もある。実数の集合 A に対して、実数 c が A の**上界** upper bound であるとは、 A に属するすべての実数 x について、 $x \leq c$ がなりたつことである。実数の集合 A に上界があるとき、 A は**上に有界**であるという。上に有界な実数の集合 A について、その上界全体の集合 $A^\sim$ には最小値が存在する。このことを**実数の連続性の公理**といい、この最小値を A の**上限**といい、記号 $\sup A$ で表す。下界、下に有界、下限も同じように考える。実数の連続性の公理は微分積分学の基本となる公理である。

2-1. 数から数への対応関係を**関数**という。関数は**関数記号** f を用いて一般に $y = f(x)$ と書き表す。ここで、 x を**独立変数**、 y を**従属変数**という。関数とは、数から数への対応関係であるので、独立変数や従属変数にどのような文字を使うかは自由である。

2-2. 関数の独立変数がとりうる数の集合をその関数の**定義域**という。また、関数の従属変数がとりうる数の集合を**値域**という。

2-4. 関数 $y = f(x)$ と数 c, A について、変数 x が限りなく c に近づくと、 $f(x)$ が A に近づけば、記号 $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow c$ のとき)、あるいは、記号 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ で表し、 A を x が限りなく c に近づくときの $f(x)$ の**極限值** limit という。また、記号 $x \rightarrow c+$ は x が c より大きい方から c に近づくことを、記号 $x \rightarrow c-$ は x が c より小さい方から c に近づくことを意味し、 $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ を**右極限值**、 $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ を**左極限值**という。右極限值と左極限值が異なることがあり、右極限值と左極限值が一致するとき、それは極限值である。

$x = c$ のまわりで定義された関数 $f(x)$ が $x = c$ で**連続**であるとは、 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ がなりたつことである。関数 $f(x)$ が $x = c$ で**右連続**であるとは、 $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = f(c)$ がなりたつことであり、関数 $f(x)$ が $x = c$ で**左連続**であるとは、 $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = f(c)$ がなりたつことである。関数 $f(x)$ が**閉区間** $[a, b]$ で**連続**であるとは、 $a < c < b$ をみたすすべての c で連続であり、 $x = a$ で右連続であり、 $x = b$ で左連続であることである。

閉区間で連続な関数については最大値と最小値が存在する。これを**最大値・最**

小値の存在定理という。また、閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ および $f(a)$ と $f(b)$ の間の実数 M に対して、 $f(c) = M$ をみたす実数 c が閉区間 $[a, b]$ 内に存在する。これを**中間値の定理**という。最大値・最小値の存在定理と中間値の定理の証明においては、実数の連続性を用いる。

2-5. 正数 a と実数 x に対して a の x 乗 a^x を性質

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

をみたす正数として定めることができる。このことの厳密な証明においては実数の連続性を用いる。さらに、性質 $(a^x)^y = a^{xy}$ がなりたつ。

2-6. 関数 a^x を a を底とする指数関数という。指数関数 a^x は $a > 1$ のとき単調増大であり、 $0 < a < 1$ のとき単調減少である。

2-7. $a > 1$ (あるいは、 $0 < a < 1$) をみたす a を底とする指数関数 $x = a^y$ は実数全体の集合 $(-\infty, \infty)$ を定義域とし正数の全体の集合 $(0, \infty)$ を値域とする単調増大な (あるいは、単調減少な) 連続関数であるので、中間値の定理より、正数 x に対して、 $a^y = x$ をみたす実数 y がただ1つ存在する。その実数 y を記号 $\log_a x$ で表し、 a を**底**とする x の**対数**という。対数は性質

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy, \quad \log_a x^y = y \log_a x$$

をもつ。

2-8. 関数 $y = \log_a x$ を a を底とする**対数関数**という。対数関数の定義域は正数全体の集合 $(0, \infty)$ であり、値域は実数全体の集合 $(-\infty, \infty)$ である。対数関数 $\log_a x$ は $a > 1$ のとき単調増大、 $0 < a < 1$ のとき単調減少である。

2-9. 数列 $(1 + \frac{1}{n})^n$ の n を限りなく大きくしたときの極限值

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

を**ネイピアの数**という。ネイピアの数は $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ をみたす。ネイピアの数を底とする指数関数とネイピアの数を底とする対数関数は微積分学において特別に重要な役割を果たす。

2-10. 複素平面上に原点を中心に半径1の円を描く。実数 x に対して、この円周上の点が表す複素数 e^{xi} を次のように定める。 $x = 0$ のときは、円周上の点 $1 + 0i$ とする。つまり、 $e^{0i} = 1$ とする。 $x > 0$ のときは、点 $1 + 0i$ から円周上を反時計回りに距離 x だけ進んだ点が表す複素数を e^{xi} とする。 $x < 0$ のときは、点 $1 + 0i$ から円周上を時計回りに距離 $-x$ だけ進んだ点が表す複素数を e^{xi} とする。すべての実数 x に対して定められた e^{xi} は性質

$$e^{xi} e^{yi} = e^{(x+y)i}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{xi} - 1}{x} = i$$

をみたく。

2-11. 三角関数 $\sin x$ と $\cos x$ は直角三角形の辺の長さの比（三角比）により定めるのが普通であるが、複素数 e^{xi} を用いて、

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

によって定めることができる。このほうが、たくさんある三角関数の性質を証明したり、覚えたりするうえでも便利であるとさえ言える。

3-1. 関数の増加減少の状態を表す関数が**導関数**である。関数 $y = f(x)$ の導関数を $f'(x)$ あるいは、 y' あるいは、 $\frac{dy}{dx}$ あるいは、 $(f(x))'$ で表す。このように、導関数の表し方には、関数記号を用いるもの、従属変数を用いるもの、関数記号も従属変数も用いないものがあるが、それぞれに利点がある。

3-2. 関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の $x = a$ における値 $f'(a)$ は、

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

これは、

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

とも表すことができる。これらの等式の右辺の極限值はどんな関数 $f(x)$ についても定まるわけではない。極限值 $f'(a)$ が定まるとき、関数 $f(x)$ は $x = a$ で**微分可能**であるといい、 $f'(a)$ を関数 $f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**という。関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば、 $x = a$ で連続である。関数 $f(x)$ が区間のすべての点

で微分可能であるとき、 $f'(x)$ はその区間で定義された関数となる。このときの関数 $f'(x)$ が関数 $f(x)$ の**導関数**である。

3-3. 関数の導関数は、そのたびに極限值を計算して求めるのではなく、公式を利用して求めることが便利である。その公式の一つは

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

である。 a が自然数の場合のこの公式は2項定理を用いて導く。また、 a が実数の場合のこの公式は対数関数の導関数の公式を用いて導くことができる。関数の1次結合、積、商の導関数を求める公式は、

$$(cf(x) + dg(x))' = cf'(x) + dg'(x), \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{f(x)^2} \quad (f(x) \neq 0 \text{ をみたす } x \text{ で})$$

である。

3-4. 関数 $y = f(t)$ に関数 $t = g(x)$ を代入して得られる関数 $y = f(g(x))$ を、関数 $y = f(t)$ と関数 $t = g(x)$ の**合成関数**という。合成関数の微分公式は、

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x), \text{あるいは、} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

である。

3-5. 指数関数、対数関数、三角関数の導関数の公式は

$$(e^x)' = e^x, \quad (\log x)' = \frac{1}{x}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

である。これらの導関数の公式を用いることによって、複雑な関数の導関数を求めることができる。指数関数の場合の導関数の公式は、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ を用いて導く。また、対数関数の場合の導関数の公式は逆関数の導関数の公式を用いて導くこともできる。さらに、三角関数の場合の導関数の公式は、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ix} - 1}{x} = i$ を用いて導いた $(e^{xi})' = ie^{xi}$ から導くことができる。

3-6. 微分可能な関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は、 $x = a$ から $x = a+h$ まで変化したときの x の変化に対する $f(x)$ の変化の割合 (変化率) $\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$

の、 h を0に限りなく近づけたときの極限值だから、関数 $f(x)$ の $x = a$ における瞬間変化率である。したがって、 $f'(a) > 0$ ならば、 $x = a$ においてこの関数は増加しており、 $f'(a) < 0$ ならば、 $x = a$ においてこの関数は減少している。

3-7. y を独立変数とし、 x を従属変数とする関数 $x = f(y)$ の値域に入る実数 x に対して、 $x = f(y)$ をみたす実数 y がただ1つであるとき、この関数 $x = f(y)$ は1対1であるという。この y を $y = g(x)$ で表すと、これは x を独立変数とし、 y を従属変数とする関数になっている。この関数 $y = g(x)$ を関数 $x = f(y)$ の**逆関数**であるという。

関数 $x = g(y)$ が導関数を持ち、 $g'(y) > 0$ ならば、この関数は単調増加だから1対1関数であり、逆関数を $y = f(x)$ とすれば、 $y = f(x)$ は微分可能であり、

$$y' = \frac{1}{g'(f(x))}, \quad \text{あるいは、} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

となる。これを**逆関数の微分公式**という。

3-8. サイン関数 $x = \sin y$ の定義域を $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に制限すると値域は $[-1, 1]$ であり、 $\frac{dx}{dy} = \cos y > 0$ ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$) だから、単調増大になり、したがって、1対1だから、逆関数が存在する。この逆関数を $y = \sin^{-1} x$ で表し、**インバースサイン関数**という。コサイン関数 $x = \cos y$ の定義域を $[0, \pi]$ に制限すると値域は $[-1, 1]$ であり、 $\frac{dx}{dy} = -\sin y < 0$ ($0 < y < \pi$) だから、単調減少になり、したがって、1対1だから、逆関数が存在する。この逆関数を $y = \cos^{-1} x$ で表し、**インバースコサイン関数**という。タンジェント関数 $x = \tan y = \frac{\sin x}{\cos x}$ の定義域を $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に制限すると値域は $(-\infty, \infty)$ であり、 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$ だから、単調増大になり、したがって、1対1だから、逆関数が存在する。この逆関数を $y = \tan^{-1} x$ で表し、**インバースタンジェント関数**という。インバースサイン関数、インバースコサイン関数、インバースタンジェント関数をそれぞれアークサイン関数、アークコサイン関数、アークタンジェント関数と呼ぶこともある。これらを総称して**逆三角関数**という。

逆三角関数の導関数の公式は

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

である。逆三角関数まで含めると、微分積分の対象となる関数の範囲がいろいろ広がる。

3-9. 関数の導関数の導関数を **2次導関数** という。

関数 $y = f(x)$ の導関数は $f'(x)$, $(f(x))'$, y' , $\frac{dy}{dx}$ のいずれかで表したが、

2次導関数は $f''(x)$, $(f(x))''$, y'' , $\frac{d^2y}{dx^2}$ のいずれかで表す。2次導関数は関数のグラフ上の各点での曲線の曲がり方を表している。つまり、 $f''(a) > 0$ ならば、関数 $y = f(x)$ のグラフは $x = a$ で下に凸であり、 $f''(a) < 0$ ならば、関数 $y = f(x)$ のグラフは $x = a$ で上に凸である。

3-10. 3次導関数、4次導関数、 $\dots$ 、 **n 次導関数** も考えることができる。関数 $y = f(x)$ について、 n 次導関数は $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ のいずれかで表す。

4-1. 閉区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ が开区間 (a, b) で微分可能であり、 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$ がなりたち (これを $x = a$ で**右連続**という)、かつ、 $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)$ がなりたち (これを $x = b$ で**左連続**という) ならば、 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ をみたす a と b の間の点 ξ が存在する。これを**平均値の定理**という。平均値の定理は、 $x = a$ から $x = b$ までの関数の平均の変化率 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ に微分係数 $f'(\xi)$ (これは $x = \xi$ での接線の傾きになる) が等しくなる点 ξ が a と b の間に存在するというものである。

4-2. 平均値の定理より、开区間 (a, b) で微分可能な関数 $f(x)$ は、 $f'(x) > 0$ ($a < x < b$) ならば単調増大であり、 $f'(x) < 0$ ($a < x < b$) ならば単調減少となる。このことより、関数の導関数の値の符号をみることにより、関数の増加減少が判定できる。

関数 $f(x)$ が、ある开区間のすべての点で微分可能で、導関数 $f'(x)$ が連続であるとき、その区間で C^1 級であるという。ある开区間で C^1 級の関数 $f(x)$ について、その区間に属する2点 a, x に対して、 $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x - a)$ をみたす ξ が a と x の間に存在する。このことから、関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで C^1 級であれば、 $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(|x - a|)$ がなりたち。ここで、記号 $o(|x - a|)$ は $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x - a} = 0$ という性質を持つ**高位の無限小**と呼ばれる関数を意味するものであり、誤差項と考えることができるので、1次近似式 $f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x - a)$ がなりたち。したがって、1次関数 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ は、関数 $y = f(x)$ のグ

ラフ上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式である。

4-3. 関数 $f(x)$ がある开区間で2次の導関数 $f''(x)$ が存在して連続であるとき、その区間で C^2 級であるという。ある开区間で C^2 級の関数 $f(x)$ について、その区間に属する2点 a, x に対して、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2$$

をみたす点 ξ が a と x の間に存在する。このことから、関数 $f(x)$ が $x = a$ のまわりで C^2 級であるとき、 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$ がなりたつ。 $o(|x-a|^2)$ を誤差項と考えれば、関数 $f(x)$ の $x = a$ の近くでの2次近似式 $f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ がなりたつ。

4-4. 関数 $f(x)$ がある开区間で n 次の導関数 $f^{(n)}(x)$ が存在して連続であるとき、その区間で C^n 級であるという。ある开区間で C^n 級の関数 $f(x)$ について、その区間に属する2点 a, x に対して、

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 \\ + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n$$

をみたす ξ が a と x の間に存在する。これを**テイラーの定理**という。テーラーの定理は、性質が分からない関数を誤差項はあるものの多項式関数で表わすものである。

4-5. 商の形をした関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ の極限值を考えると、分母の関数と分子の関数の

それぞれの極限值がともに0、あるいは、 ∞ になるときは、 $\frac{0}{0}$ 、あるいは、 $\frac{\infty}{\infty}$ となって、そのままでは極限值が決まらない。このようなものを**不定形の極限值**と呼ぶ。 $f(a) = g(a) = 0$ をみたす $x = a$ の近くで微分可能な関数 $f(x), g(x)$ について、

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ ならば、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ がなりたつ。これを不定形の極限值について**ロピタルの定理**という。もう一つのロピタルの定理は、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) =$

∞ をみたす2つの微分可能な関数 $f(x), g(x)$ について、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ならば、

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ がなりたつというものである。

5-1. $F'(x) = f(x)$ になりたつとき、関数 $F(x)$ は関数 $f(x)$ の**原始関数**という。関数 $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とするとき、関数 $f(x)$ の原始関数の全体の集合は $\{ F(x) + c \mid c \text{は実数} \}$ である。関数 $f(x)$ の原始関数の全体の集合を記号 $\int f(x)dx$ で表し、 $f(x)$ の**不定積分**という。

5-2. 関数 $f(x)$ は導関数 $f'(x)$ の原始関数だから、 $\int f'(x)dx = f(x) + c$ になりたつ。すなわち、関数を微分して得られる導関数を不定積分すればもとの関数が得られるということ、つまり、不定積分は微分の逆演算である。したがって、導関数の公式のそれぞれから次の不定積分の公式が得られる。

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad (a \neq -1 \text{ のとき})$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x|, \quad \int e^x dx = e^x$$

$$\int \cos x dx = \sin x, \quad \int \sin x dx = -\cos x, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x,$$

$$\int (cf(x) + dg(x))dx = c \int f(x)dx + d \int g(x)dx,$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx,$$

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \text{ ただし, } x = g(t)$$

5-3. 不定積分はこれらの公式を使って計算するが、不定積分の計算はいつでもできるわけではない。

5-4. 逆三角関数に加わると、不定積分を計算ができる関数の範囲が大きく広がる。

5-5. 関数とその導関数の関係を与える等式を**微分方程式**という。左辺には y が付いたものばかり、右辺には x が付いたものばかりの等式が得られる微分方程式を**変数分離形の微分方程式**という。変数分離形の微分方程式は変数分離して、両辺の不定積分を計算することによって解を求める。

5-6. $y' = f(\frac{y}{x})$ という形をした微分方程式を**同次形の微分方程式**という。同次形の微分方程式は $u = \frac{y}{x}$ と変数変換することにより、変数分離形の微分方程式になる。

5-7. $y' + P(x)y = Q(x)$ の形をした微分方程式を **1 階線形微分方程式** という。1 階線形微分方程式については $y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + c \right)$ という解の公式がある。

6-1. 記号 $\int_a^b f(x)dx$ は、関数 $f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの **定積分** と読む。 $F(x)$

を連続関数 $f(x)$ の原始関数とすると、定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の値は、

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ によって計算できる。特に、閉区間 $[a, b]$ 上で定義された

C^1 級の関数 $f(x), g(x)$ について、 $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$ になりたつ。これを **定積分についての部分積分の公式** という。また、 C^1 級の関数 $x = g(t)$ が $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$ をみたすならば、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

になりたつ。これを **定積分についての置換積分の公式** という。定積分は曲線で囲まれる図形の面積を意味する。

6-2. 定積分の定義は次のように行なう。閉区間 $[a, b]$ で定義された有界な関数 $f(x)$ を考える。閉区間 $[a, b]$ 内に n 個の点をとった **分割** $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ に対して、分割 Δ の i 番目の小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ における関数 $f(x)$ の値の下限を m_i で、上限を M_i とするとき、底辺の長さ $x_i - x_{i-1}$ 、高さ m_i の長方形の面積を n 個の i について加えた合わせたものを $s(\Delta)$ 、また、底辺の長さ $x_i - x_{i-1}$ 、高さ M_i の長方形の面積を n 個の i について加え合わせたものを $S(\Delta)$ とする。すべての分割 Δ についての $s(\Delta)$ の上限を s とし、すべての分割 Δ についての $S(\Delta)$ の下限を S とすると、 $s \leq S$ になりたつ。特に $s = S$ になりたつとき、関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で **積分可能** であるという。このとき一致した値を閉区間 $[a, b]$ における関数 $f(x)$ の **定積分** といい、記号 $\int_a^b f(x)dx$ で表す。閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能である。

6-3. 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ について、 $G(t) = \int_a^t f(x)dx$ と置くと、 $G'(t) =$

$f(t)$ がなりたつ。これを**微積分学の基本定理**という。 $G(x)$ は $f(x)$ の原始関数だということだから、定積分 $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ は $f(x)$ の原始関数を用いて計算できるという定積分の計算法が保証されたことになる。

6-4. 閉区間 $[\alpha, \beta]$ で定義された2つの連続な関数 $x = f(t)$, $y = g(t)$ が与えられたとき、 (x, y) 平面上の点 $(f(t), g(t))$ を考え、変数 t を動かすと**曲線**を描く。この曲線の長さは $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt$ となる。

7-1. 2つの数の組 (x, y) を与えるごとに1つの数 $z = f(x, y)$ が決まる対応関係を**2変数関数**という。2変数 $z = f(x, y)$ の y を定数と見て変数 x の1変数関数と考えたときの導関数を記号 $\frac{\partial z}{\partial x}$ で表し、 z の x についての**偏導関数**という。また、 x を定数と見て変数 y の1変数関数と考えたときの導関数を記号 $\frac{\partial z}{\partial y}$ で表し、 z の y についての偏導関数という。2つの偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ はそれぞれ $f_x(x, y), f_y(x, y)$ で表す表し方もある。偏導関数を求めることを、関数を**偏微分する**という。

関数 $z = f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ における値はそれぞれ

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}, \quad f_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

であるが、これら $f_x(a, b)$ と $f_y(a, b)$ がともに定まるとき、関数 $z = f(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で**偏微分可能**であるという。また、 $f_x(a, b)$ と $f_y(a, b)$ をそれぞれ $(x, y) = (a, b)$ における x についての**偏微分係数**、 y についての偏微分係数という。偏微分係数 $f_x(a, b)$ は点 (a, b) における x 軸方向の関数の増加減少率を、偏微分係数 $f_y(a, b)$ は点 (a, b) での y 軸方向の関数の増加減少率を表す。

7-2. 2変数関数 $z = f(x, y)$ に2つの1変数関数 $x = h(t), y = k(t)$ を代入すると1変数の合成関数 $z = f(h(t), k(t))$ が得られる。1変数関数の場合は微分可能な関数と微分可能な関数の合成関数は微分可能であるが、2変数関数の場合には、 $z = f(x, y)$ が偏微分可能で、 $x = h(t)$ と $y = k(t)$ が微分可能でも、合成関数 $z = f(h(t), k(t))$ は必ずしも微分可能にはならない。ここに多変数関数特有の事情がある。

2変数関数 $\epsilon(x, y)$ は、 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ が0に限りなく近づくと、 $\frac{|\epsilon(x, y)|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$ が0に近づくなれば、 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ よりも**高位の無限小**であるといい、記号 $\epsilon(x, y) = o(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})$ で表す。また、2変数関数 $f(x, y)$ は、

$$f(x, y) = f(a, b) + A(x-a) + B(y-b) + o(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})$$

をみたす2つの定数 A と B が存在するとき、点 (a, b) で**全微分可能**であるという。関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) で全微分可能であるならば、点 (a, b) で偏微分可能であり、

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + o(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})$$

がなりたつ。偏微分可能であっても全微分可能でない関数が存在する。

2変数関数 $z = f(x, y)$ は、偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ が定まり、これらの偏導関数がともに連続関数であるとき、 C^1 級であるという。関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) の近くで C^1 級であれば、点 (a, b) で全微分可能である。

2変数関数 $z = f(x, y)$ が C^1 級であり、2つの1変数関数 $x = g(t), y = h(t)$ が微分可能ならば、合成関数 $z = f(g(t), h(t))$ について、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

という**合成関数の微分公式**がなりたつ。

2変数関数 $z = f(x, y)$ が C^1 級であり、2つの2変数関数 $x = g(u, v), y = h(u, v)$ が偏微分可能ならば、これらの合成関数である2変数関数 $z = f(g(u, v), h(u, v))$ は偏微分可能であり、

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

という**合成関数の偏微分公式**がなりたつ。

7-3. 2変数関数 $z = f(x, y)$ の x についての偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ (または、 $f_x(x, y)$) は2変数関数であり、その x についての偏導関数を $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (または、 $f_{xx}(x, y)$) で表し、 y についての偏導関数を $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ (または、 $f_{xy}(x, y)$) で表す。同様に、 $z = f(x, y)$ の y についての偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial y}$ (または、 $f_y(x, y)$) の、 x についての偏導関数を $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (または、 $f_{yx}(x, y)$) で、 y についての偏導関数を $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (または、 $f_{yy}(x, y)$) で表

す。これら $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (または、 $f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y), f_{yy}(x, y)$) を $z = f(x, y)$ の **2次偏導関数** という。2変数関数 $z = f(x, y)$ は、その4つの2次偏導関数が定まって、すべて連続であるとき、 C^2 級であるという。2変数関数 $z = f(x, y)$ が点 (a, b) の近くで C^2 級であれば、 $f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b)$ がなりたつ。つまり、偏微分する順序によらない。

7-4. 点 (a, b) の近くで C^2 級の2変数関数 $f(x, y)$ について、近似式

$$f(x, y) \doteq f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2}f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2}f_{yy}(a, b)(y - b)^2$$

がなりたつ。

7-5. C^2 級の2変数関数 $f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ において $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ をみたすとする。このとき、 $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 > 0$ かつ、 $f_{xx}(a, b) > 0$ ならば、関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) で極小値をとる。また、 $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 > 0$ かつ、 $f_{xx}(a, b) < 0$ ならば、関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) で極大値をとる。

7-6. 点 (a, b) のまわりで定義された C^1 級の2変数関数 $F(x, y)$ が $F(a, b) = 0$ および $F_y(a, b) \neq 0$ をみたすならば、 $x = a$ のまわりで定義された関数 $y = f(x)$ で $f(a) = b$ および $F(x, f(x)) = 0$ をみたすものが存在する。これを**陰関数の存在定理**という。この陰関数の存在定理を用いると、2つの C^1 級の2変数関数 $F(x, y), G(x, y)$ について、関数 $F(x, y)$ を集合 $\Lambda = \{ (x, y) \mid G(x, y) = 0 \}$ に制限したときの極値をとる点 (a, b) で $G_x(a, b)^2 + G_y(a, b)^2 \neq 0$ をみたすならば、3変数関数 $H(x, y, \lambda) = F(x, y) - \lambda G(x, y)$ について、 $H_x(a, b, \lambda) = H_y(a, b, \lambda) = 0$ をみたすような数 λ が存在することが言える。これは、条件 $G(x, y) = 0$ のもとでの関数 $F(x, y)$ の極値をとる点を3変数関数 $H(x, y, \lambda)$ の極値として見つけ出す方法を与えるものであり、**グランジュの未定乗数法**という。

8-1. 閉区間 $[a, b]$ 上で定義された2つの連続な関数 $g(x), h(x)$ (ただし、 $h(x) \leq g(x)$ ($a \leq x \leq b$)) で挟まれた縦線型集合 $D = \{ (x, y) \mid h(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b \}$ 上の連続関数 $f(x, y)$ について、 $\iint_D f(x, y) dx dy$ を $f(x, y)$ の D における

2重積分という。この2重積分は

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

と累次積分によって計算できる。被積分関数が $f(x, y) \geq 0$ をみたすとき、この2重積分は、座標空間の曲面 $z = f(x, y)$ と (x, y) 平面とで挟まれた集合 D の範囲での柱体の体積を意味する。

8-2. 2重積分のきちんとした定義は次の通りである。まず、閉長方形集合 $[a, b] \times [c, d] = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$ 上で2変数関数 $f(x, y)$ の2重積分を定義する。閉区間 $[a, b]$ に分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ と閉区間 $[c, d]$ に分点 $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$ をとってできる閉長方形集合 $[a, b] \times [c, d]$ の小長方形集合への分割を記号

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$$

で表す。この分割の (i, j) 番目の小長方形集合 $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{ (x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j \}$ における関数 $f(x, y)$ の上限を M_{ij} 、下限を m_{ij} とし、小長方形集合の面積 $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ に高さ M_{ij} を掛けた直方体の体積の総和を $S(\Delta)$ 、高さ m_{ij} を掛けた直方体の体積の総和を $s(\Delta)$ とする。すべての分割 Δ についての $S(\Delta)$ の下限を S 、 $s(\Delta)$ の上限を s とすると、 $s \leq S$ がなりたつ。特に、 $s = S$ がなりたつとき、2変数関数 $f(x, y)$ は閉長方形集合 $[a, b] \times [c, d]$ 上で**2重積分可能**であるという。また、一致した値を $f(x, y)$ の $[a, b] \times [c, d]$ 上での**2重積分の値**といい、記号 $\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy$ で表す。

座標平面の集合 D に対して、 D に属する点では値1をとり、 D に属さない点では値0をとる2変数関数を記号 $1_D(x, y)$ で表し、 D の**定義関数**という。閉区間 $[a, b]$ 上で定義された2つの連続な関数 $g(x), h(x)$ で挟まれた縦線型集合 D で連続な関数 $f(x, y)$ について、関数 $f(x, y)1_D(x, y)$ は2重積分可能である。2重積分の値 $\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y)1_D(x, y) dx dy$ を $\iint_D f(x, y) dx dy$ で表す。この2重積分の値は累次積分によって計算できる。

2つの C^1 級の関数 $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$ によって、 (x, y) 平面の集合 D が (u, v) 平面の集合 E に1対1に写るとき、集合 E 上の連続関数 $f(u, v)$ の2重積分と合成関数 $f(g(x, y), h(x, y))$ の2重積分の間に

$$\iint_E f(u, v) du dv = \iint_D f(g(x, y), h(x, y)) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx dy$$

がなりたつ。これを**2重積分の置換積分の公式**という。ここで、2次の行列式の値

で定まる

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

は $u = g(x, y), v = h(x, y)$ のヤコビアンという。

8-4. (u, v) 平面の長方形集合 $D = \{ (u, v) \mid a \leq u \leq b, c \leq v \leq d \}$ で定義された3つの関数 $x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v)$ が C^1 級であるとき、曲面 $S : x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v) \quad ((u, v) \in D)$ の曲面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} du dv$$

に等しい。

8-5. n 変数関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の n 重積分 $\iint \dots \int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$ も2重積分と同じように考えることができ、 n 重積分の値も積分を n 回行なう累次積分によって求めることができる。 n 重積分の置換積分の公式も、 n 次の行列式で定まるヤコビアンを用いて表せる。

9-2. 関数の極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ の ϵ - δ 論法による定義は、 $\epsilon > 0$ に対して、 $0 < |x - a| < \delta$ をみたす x について $|f(x) - A| < \epsilon$ がなりたつような $\delta > 0$ が存在することである。

9-3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ と $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ がなりたっているとき、(1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$ (2) $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cA$ (c は定数) (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$ (4) $A \neq 0$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{B}{A}$ がなりたつ。

9-5. 数列の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ の ϵ - N 論法による定義は、 $\epsilon > 0$ に対して、 $n \geq N$ ならば、 $|a_n - a| < \epsilon$ がなりたつ自然数 N が存在することである。

9-6. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ がなりたつとき、(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$ (4) $a \neq 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}$ がなり
 たつ。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ がなりたつとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} = a$ がなりたつこと
 を $\epsilon - N$ 論法で証明できるが、このことの説得力のある説明を $\epsilon - \delta$ 論法によらずに
 与えることは困難である。

9-7. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ がなりたつための必要十分条件は $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a_n \neq a$ ($n =$
 $1, 2, 3, \dots$) をみたす数列 a_n について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$ がなりたつことである。関
 数の極限と数列の極限についてのこの関係は極限の議論においてたびたび用いら
 れる。

9-8. (x, y) が点 (a, b) に近づくとは、これら 2 点間の距離 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$
 が 0 に近づくことである。また、点列 (a_n, b_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$ が点 (a_0, b_0) に近
 づくとは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2} = 0$ がなりたつことである。したがっ
 て、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = A$ の $\epsilon - \delta$ 論法による定義は、 $\epsilon > 0$ に対して、 $0 <$
 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ をみたす (x, y) について $|f(x, y) - A| < \epsilon$ がなりたつ
 ような正数 δ が存在することである。

10-1. 実数の連続性の公理と「上に有界な単調非減少数列は極限值が存在する。」
 とは同値である。

10-2. 実数の連続性の公理を用いて、有界な数列は収束する部分列を持つことを
 示すことができる。

10-3. 実数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ がコーシー列であるとは、任意の正数 ϵ に対して、
 $n, m \geq N$ ならば、 $|a_n - a_m| < \epsilon$ となるような自然数 N が存在することである。
 実数の連続性を用いることにより、数列が収束することとコーシー列であること
 は同値であることを示すことができる。

10-4. 閉区間 $[a, b]$ の各点 x を中心とする x に依存する長さ $\delta(x)$ の開区間 $U_{\delta(x)}(x) = (x - \delta(x), x + \delta(x))$ が与えられているとき、 $[a, b]$ はこのうちの有限個 $U_{\delta(x_1)}(x_1), U_{\delta(x_2)}(x_2), \dots, U_{\delta(x_k)}(x_k)$ の和集合の部分集合になることを実数の連続性を用いて示すことができる。

10-5. 次の性質 (1), (2), (3), (4) をみたす実数の集合 R_- と R_+ を与えることを**デデキント切断**という。

- (1) R_- に属する数よりも小さい数は R_- に属する。
- (2) R_+ に属する数よりも大きい数は R_+ に属する。
- (3) R_- と R_+ とのどちらにも属する数はない。 ($R_- \cap R_+ = \emptyset$)
- (4) すべての実数は R_- または R_+ に属する。 ($R_- \cup R_+ = R$)

デデキント切断 R_-, R_+ において、 R_- に最大値があり、 R_+ に最小値があるということとは起こらない。この性質は実数の連続性の公理と同値である。

10-6. 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ について、(1) 値域は有界である。(2) $[a, b]$ の中に最大値をとる点と最小値をとる点が存在する。(3) $f(a) < M < f(b)$ または、 $f(a) > M > f(b)$ がなりたつとき、 $f(c) = M$ をみたす c ($a \leq c \leq b$) が存在する。(4) 正数 ϵ に対して、 $|x - x'| < \delta$, $a \leq x, x' \leq b$ ならば、 $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ をみたす ϵ に依存しない正数 δ が存在する (一様連続性)。がなりたつ。

10-7. 座標平面上の集合 D が**閉集合**であるとは、 D に属する点列が収束するならば、収束点もまた D に属することである。座標平面上の有界閉集合 D の各点 (x, y) に、その点を中心とする (点 (x, y) に依存する) 半径 $\delta(x, y)$ の開球 $U_{\delta(x, y)}(x, y)$ が与えられているとき、そのうちの有限個の開球 $U_{\delta(x_1, y_1)}(x_1, y_1), U_{\delta(x_2, y_2)}(x_2, y_2), \dots, U_{\delta(x_k, y_k)}(x_k, y_k)$ を取り出して、 D がそれら有限個の開球の和集合の部分集合となるようにできる。

10-8. 有界閉集合 D で定義された連続関数 $f(x, y)$ について、(1) 値域は有界である。(2) 最大値をとる点と最小値をとる点が D に存在する。(3) 正数 ϵ に対して、 $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < \delta$, $(x, y) \in D$, $(x', y') \in D$ ならば、 $|f(x, y) - f(x', y')| < \epsilon$ をみたす ϵ に依存しない正数 δ が存在する (一様連続性)。がなりたつ。