コラム：平行四辺形の符号付き面積

ここでは行列式の幾何学的な面に注目して，2 次正方行列の行列式が，2 つの平面ベクトルが作る平行四辺形の**符号付き面積**と考えられるということを見てゆこう．

2 つの平行でない平面ベクトルの組$\vec{a},\vec{b}$に対して，ベクトル$\vec{a}$を始点を中心に反時計回りに回転して，ベクトル$\vec{b}$と同じ向きにするとき，回転する角度θ（$0<\theta<2\pi$）を$\vec{b}$の$\vec{a}$に対する回転角とよぶ．このとき**符号**（サイン）$\mathrm{sgn}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$を

$$\mathrm{sgn}(\vec{a},\vec{b})=\begin{cases}+1 & （0<\theta<\pi のとき） \\ -1 & （\pi<\theta<2\pi のとき）\end{cases}$$

と定める．また，$\vec{a}$と$\vec{b}$が平行である場合（零ベクトルである場合も含む）は便宜上 $\mathrm{sgn}(\vec{a},\vec{b})=0$ と定める．

2 つの平面ベクトルの組$\vec{a},\vec{b}$に対し，4 点$\mathrm{O},\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$を$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となるようにとるとき，平行四辺形OACBを$\vec{a},\vec{b}$によりはられる平行四辺形という．また，平行四辺形の面積をSとするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$によりはられる平行四辺形の**符号付き面積**$S_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$を

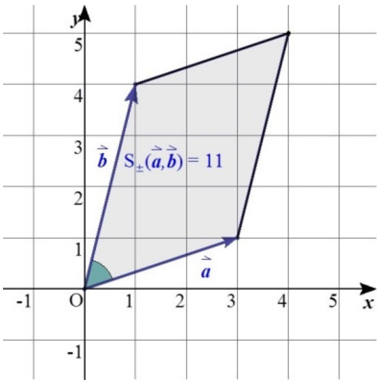
$$S_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\mathrm{sgn}\left(\vec{a},\vec{b}\right)S$$

と定める．

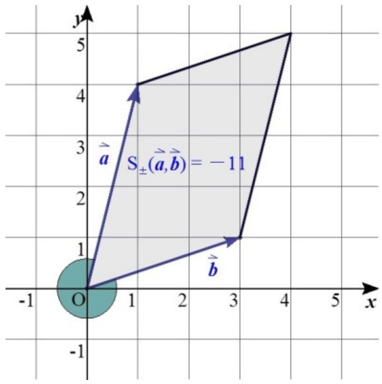
以下，ベクトルは列ベクトルで考える．

例　（１）　$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$のとき，$\mathrm{sgn}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=+1$，$S_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=11$

（２）　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$のとき，$\mathrm{sgn}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-1$，$S_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-11$



（１）



（２）　□

平行四辺形の符号付き面積$S_{\pm}(\vec{a},\vec{b})$について，次の性質が成り立つ．

(1) $S_{\pm}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=1$

(2) $\vec{a}$または$\vec{b}$が零ベクトルであれば符号付き面積は 0.

(3) $\vec{a}=\vec{b}$であれば符号付き面積は 0.

(4) $\vec{a}$または$\vec{b}$をα倍すると符号付き面積はα倍される．

$$例：\quad S_{\pm}(\alpha\vec{a},\vec{b})=\alpha S_{\pm}(\vec{a},\vec{b})$$

(5) $\vec{a}$または$\vec{b}$が 2 つのベクトルの和に分解されるとき，符号付き面積を 2 つの符号付き面積の和に分けることができる．

$$例：S_{\pm}(\vec{a},\vec{b}+\vec{b}')=S_{\pm}(\vec{a},\vec{b})+S_{\pm}(\vec{a},\vec{b}')$$

(6) $\vec{a}$または$\vec{b}$の定数倍をもう一方のベクトルに加えても符号付き面積は変わらない．

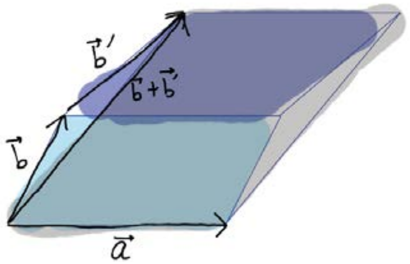
$$例：S_{\pm}(\vec{a},\vec{b}+\alpha\vec{a})=S_{\pm}(\vec{a},\vec{b})$$

(7) $\vec{a}$と$\vec{b}$を入れ替えると符号付き面積の符号が変わる．

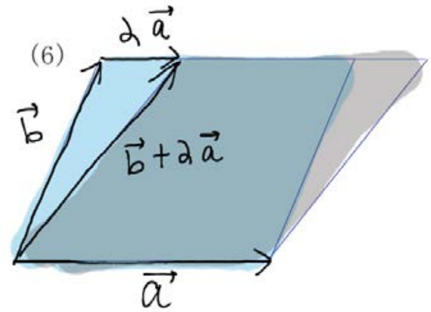
$$S_{\pm}(\vec{a},\vec{b})=-S_{\pm}(\vec{b},\vec{a})$$

(5)と(6)以外は定義から明らかであろう．(5)(6)については以下の図より分かる．

(5)



(6)



いずれも青色の平行四辺形の面積（の和）と，灰色の平行四辺形の面積は等しい．■

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$とすると，(2)～(7)より，符号付き面積$S_{\pm}(\vec{a},\vec{b})$は行列式$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}$の列に関する基本性質を満たし，しかも(1)より

$$S_{\pm}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}=1$$

である．したがって（列基本変形を用いて単位行列の場合に帰着させることにより）

$$S_{\pm}\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

となることが分かる．

（実際に，$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とおくと，$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$, $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2$ だから，

$$S_{\pm}\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right)=S_{\pm}\left(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2,\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right)\underset{(4),(5)\text{より}}{=}a_1S_{\pm}\left(\vec{e}_1,\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right)+a_2S_{\pm}\left(\vec{e}_2,\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right)$$

$$=a_1S_{\pm}\left(\vec{e}_1,b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2\right)+a_2S_{\pm}\left(\vec{e}_2,b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2\right)$$

$$\underset{(4),(5)\text{より}}{=}a_1b_1\cdot S_{\pm}\left(\vec{e}_1,\vec{e}_1\right)+a_1b_2\cdot S_{\pm}\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)+a_2b_1\cdot S_{\pm}\left(\vec{e}_2,\vec{e}_1\right)+a_2b_2\cdot S_{\pm}\left(\vec{e}_2,\vec{e}_2\right)$$

$$\underset{(1),(3),(7)\text{より}}{=}a_1b_1\cdot 0+a_1b_2\cdot 1+a_2b_1\cdot(-1)+a_2b_2\cdot 0=a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\quad)$$

以上より，

$$S=\left|S_{\pm}\right|=|a_1b_2-a_2b_1|$$

が成り立つことが分かった．