応用数学問題集 C 問題詳解 (最終原稿)

西川雅堂

2015,10,5 提出

目　次

0.1　問　題　解　答

問題 C 解答

1　斉次方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0 \cdots (*)$$

の特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ で，その解は $\lambda = 1$ より，$(*)$ の一般解は $y_1 = (C_1 + C_2 t)e^t$ $(C_1, C_2$は任意定数$)$．特殊解 y_0 を $y_0 = (At + B)\sin t + (Ct + D)\cos t$ $(A, B, C, D$ は定数$)$ とおいて与式に代入すると，

$$2Ct\sin t + (-2C - 2A + 2D)\sin t - 2At\cos t + (2A - 2B - 2C)\cos t = t\sin t.$$

t についての恒等式より係数を比較すれば

$$\begin{cases} 2C = 1 \\ -2C - 2A + 2D = 0 \\ -2A = 0 \\ 2A - 2B - 2C = 0. \end{cases}$$

※ $(pt + q)\sin t + (rt + s)\cos t = 0$
$(p, q, r, s$ は定数$)$ が t についての恒等式
$\Longleftrightarrow p = q = r = s = 0$

これを解いて $A = 0,\ B = -\dfrac{1}{2},\ C = \dfrac{1}{2},\ D = \dfrac{1}{2}$．よって求める一般解は，

$$y = y_1 + y_0 = (C_1 + C_2 t)e^t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}(t+1)\cos t \quad (C_1, C_2\text{は任意定数}).$$

2　(1)　$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$ を与式に代入すると，

$$6a_3x^2 + 2(3a_3 + 2a_2)x + 2(a_2 + a_1) = \frac{x^2}{2} + 1.$$

係数を比較すれば $a_3 = \dfrac{1}{12},\ a_2 = -\dfrac{1}{8},\ a_1 = \dfrac{5}{8}$.

(2)　斉次方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0 \cdots (*)$$

の特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2) = 0$ で，その解は $\lambda = -2, 0$ だから，

$(*)$ の一般解は $y_1 = C_1 + C_2 e^{-2x}$ (C_1, C_2は定数)．よって求める一般解は，$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \dfrac{1}{12}x^3 - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{5}{8}x$ (C_1, C_2は任意定数)．

3 (1)　$(x, y) = (1, 3)$

(2)　$x = X + 1,\ y = Y + 3$ とおいて変数変換すると与式は $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{2X - Y}{X - 2Y}$

(3)　$u = \dfrac{Y}{X}$ とおくと，$Y' = u'X + u$ より $u'X = \dfrac{2 - 2u + 2u^2}{1 - 2u}$．よって，

$$\frac{1}{2}\int \frac{1 - 2u}{1 - u + u^2}du = \int \frac{1}{X}dX$$

より，

$$-\frac{1}{2}\log|1 - u + u^2| = \log|X| + C_1 \quad (C_1\text{は任意定数}).$$

つまり，$\pm e^{-C_1} = C_2$ とおきなおして，

$$C_2 X\sqrt{1 - u + u^2} = 1 \quad (C_2\text{は任意定数}).$$

$u = \dfrac{Y}{X}$ を代入して $C_3 = \dfrac{1}{C_2^2}$ とおくと

$$X^2 - XY + Y^2 = C_3 \quad (C_3\text{は任意定数}).$$

(4)　$X = x - 1, Y = y - 3$ を代入すると

$$x^2 - xy + y^2 + x - 5y = C \quad (C\ \text{は任意定数}).$$

4 (1)　与式の特性方程式は $\lambda^2 + 2b\lambda + \omega^2 = 0$ で，その解は $\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$．よって一般解は

- $b^2 - \omega^2 = 0$ の場合は，　$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-bt}$ (C_1, C_2は任意定数)$\cdots$ⓐ.
- $b^2 - \omega^2 < 0$ の場合は，　$\lambda = -b \pm \sqrt{\omega^2 - b^2}\ i$ より
  $x(t) = e^{-bt}(C_1 \cos\sqrt{\omega^2 - b^2}\ t + C_2 \sin\sqrt{\omega^2 - b^2}\ t)$ (C_1, C_2は任意定数)$\cdots$ⓑ.

(2)　$b^2 - \omega^2 = 0$ のとき，ⓐを微分すると

$$x'(t) = C_2 e^{-bt} - b(C_1 + C_2 t)e^{-bt}$$

より，初期条件から連立方程式

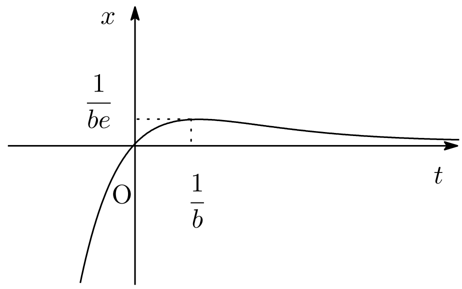
$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -bC_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

を解いて $C_1 = 0,\ C_2 = 1$ をえる．よって解は $x(t) = te^{-bt}$.

このとき増減表

t	$\cdots$	$\frac{1}{b}$	$\cdots$
x'	$+$	0	$-$
x	$\nearrow$	$\frac{1}{be}$	$\searrow$

と $\displaystyle\lim_{t\to\infty} te^{-bt} = 0,\ \lim_{t\to-\infty} te^{-bt} = -\infty$
から，右のグラフとなる．



$b^2 - \omega^2 < 0$ のときは，ⓑを微分すると

$$\begin{aligned} x'(t) &= -be^{-bt}(C_1 \cos\sqrt{\omega^2 - b^2}\ t + C_2 \sin\sqrt{\omega^2 - b^2}\ t) \\ &\quad + \sqrt{\omega^2 - b^2}\ e^{-bt}(-C_1 \sin\sqrt{\omega^2 - b^2}\ t + C_2 \cos\sqrt{\omega^2 - b^2}\ t) \end{aligned}$$

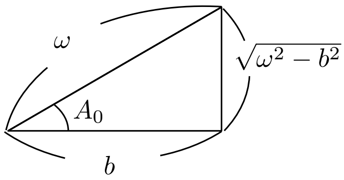
より，初期条件から連立方程式

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -bC_1 + \sqrt{\omega^2 - b^2}C_2 = 1 \end{cases}$$

を解いて $C_1 = 0,\ C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}$ をえる．よって解は $x(t) = \dfrac{e^{-bt}}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} \sin\sqrt{\omega^2 - b^2}\ t$.

$x'(t) = 0$ から $\tan\sqrt{\omega^2 - b^2}\ t = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - b^2}}{b}$．よって，

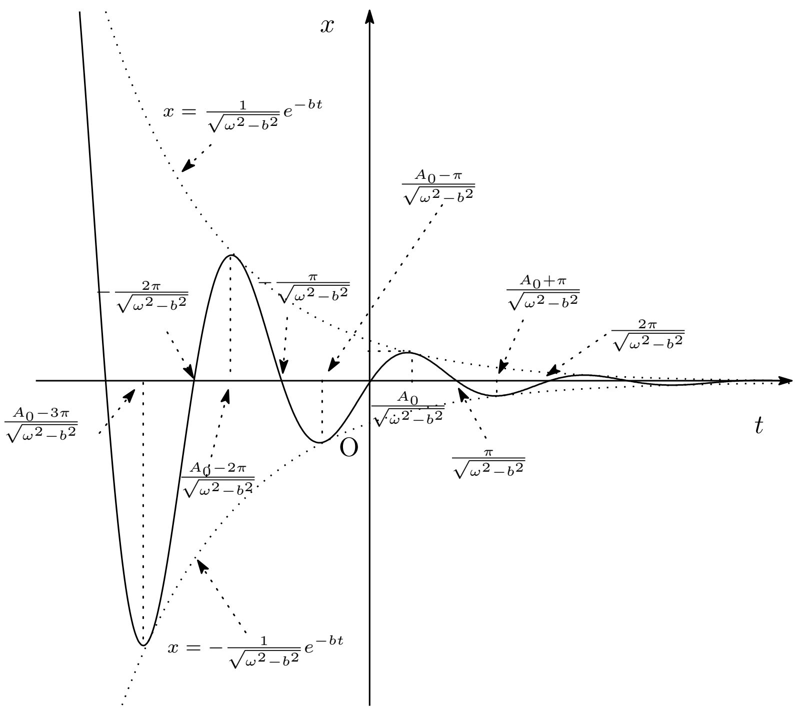
$t = \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}\left(\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{\omega^2 - b^2}}{b} + n\pi\right),\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$



$$\tan^{-1}\frac{\sqrt{\omega^2-b^2}}{b}=A_0\quad\left(0<A_0<\frac{\pi}{2}\right)$$
とおくと増減表は,

t	$\cdots$	$\frac{A_0-2\pi}{\sqrt{\omega^2-b^2}}$	$\cdots$	$\frac{A_0-\pi}{\sqrt{\omega^2-b^2}}$	$\cdots$	$\frac{A_0}{\sqrt{\omega^2-b^2}}$	$\cdots$	$\frac{A_0+\pi}{\sqrt{\omega^2-b^2}}$	$\cdots$
x'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
x	$\nearrow$	$\frac{1}{\omega}e^{-b\frac{A_0-2\pi}{\sqrt{\omega^2-b^2}}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\omega}e^{-b\frac{A_0-\pi}{\sqrt{\omega^2-b^2}}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\omega}e^{-b\frac{A_0}{\sqrt{\omega^2-b^2}}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\omega}e^{-b\frac{A_0+\pi}{\sqrt{\omega^2-b^2}}}$	$\nearrow$

となる．また，$x(t)=0$ より $\sqrt{\omega^2-b^2}\;t=n\pi,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ であり，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-bt}}{\sqrt{\omega^2-b^2}}\sin\sqrt{\omega^2-b^2}\;t=0$ なので，グラフは



$\boxed{\mathbf{5}}$ 斉次方程式

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \cdots (*)$$

の特性方程式は $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$ で，その解は $\lambda = 1, 3$ より，$(*)$ の一般解 y_1 は，$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ (C_1, C_2は任意定数).

非斉次方程式の特殊解を $y_0 = Ae^{-x}$(A は定数) とおき，方程式に代入すると $8A = 1$ となり，$A = \dfrac{1}{8}$．よって $y_0 = \dfrac{1}{8}e^{-x}$．以上より非斉次方程式の一般解は

$$y = y_1 + y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{8}e^{-x}\ (C_1, C_2\text{は任意定数}).$$

$y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x} - \dfrac{1}{8}e^{-x}$ より初期条件から連立方程式

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \dfrac{1}{8} = 0 \\ C_1 + 3C_2 - \dfrac{1}{8} = 1 \end{cases}$$

を解いて $C_1 = -\dfrac{3}{4}$, $C_2 = \dfrac{5}{8}$ をえる．よって，求める解は

$$y = -\frac{1}{8}(6e^x - 5e^{3x} - e^{-x}).$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $y' = \left(\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{z'}{z^2}$ を与式に代入すると $-\dfrac{z'}{z^2} = \dfrac{1}{z} - x\dfrac{1}{z^2}$．よって

$$z' + z = -x \cdots ①$$

(2) ①に e^x をかけると $(e^x z)' = -xe^x$．これを積分すると $e^x z = (-x+1)e^x + C$ (C は積分定数)．よって，$y = \dfrac{1}{z}$ より一般解は

$$y = \frac{1}{Ce^{-x} - x + 1} \quad (C\text{ は任意定数}).$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ 与式は $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - y\dfrac{dy}{dx} - x(x-y) = 0$ で $\dfrac{dy}{dx}$ について因数分解すると $\left(\dfrac{dy}{dx} - x\right)\left(\dfrac{dy}{dx} + x - y\right) = 0$ となる．つまり，

$$\frac{dy}{dx} = x \cdots ① \quad \text{または} \quad \frac{dy}{dx} - y = -x \cdots ②$$

を満たす解を求めればよい．①については一般解が $y = \dfrac{1}{2}x^2 + C_1$ (C_1は任意定数) より初期条件から $0 = C_1$ となる．よって求める特殊解は, $y = \dfrac{1}{2}x^2$．②については一般解が $y = x + 1 - e^x + C_2$ (C_2は任意定数) より初期条件から $0 = C_2$．よって求める特殊解は，$y = x + 1 - e^x$　以上より，解は $\left(y - \dfrac{1}{2}x^2\right)(y - x - 1 + e^x) = 0$.

8 (1) 与式の両辺を微分する．

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\{xf(x)\}' = -\{f(x) + xf'(x)\} \\ &= -\{f(x) + x(-xf(x))\} = (x^2 - 1)f(x). \end{aligned}$$

よって，$f''(x) = (x^2 - 1)f(x)$.

(2) 与式は f について変数分離形より一般解は $f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ (C は任意定数).
初期条件から $C = 1$ となり，$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

9 (1) $y' = (u' - u)e^{-x}$，$y'' = (u'' - 2u' + u)e^{-x}$ を与式に代入して $e^{-x}\{(x+1)u'' - (x+2)u'\} = 0$．よって

$$(x+1)u'' - (x+2)u' = 0.$$

(2) $u' = p$ と置くと $p' = \dfrac{x+2}{x+1}p$．変数分離形より一般解は $p = C_1(x + 1)e^x$　(C_1は任意定数)　これを積分すれば一般解は,

$$u = C_1xe^x + C_2 \ (C_1, C_2\text{は任意定数}).$$

(3) $y = C_1x + C_2e^{-x}$ (C_1, C_2は任意定数)

10 変数分離形より，一般解は $\displaystyle\int \frac{1}{(y^2+1)(y-1)(y+2)}\,dy = \int \frac{1}{x^2}\,dx \cdots ①$.
左辺において

$$\frac{1}{(y^2+1)(y-1)(y+2)} = \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{C}{y-1} + \frac{D}{y+2}$$

$(A, B, C, D$ は任意定数) とおいて部分分数分解する．分母を払って整理すると，

$$\begin{aligned}1 &= (A+C+D)y^3 + (A+B+2C-D)y^2 + (-2A+B+C+D)y \\ &\quad +(-2B+2C-D)\end{aligned}$$

となる．係数を比較すれば $A = -\dfrac{1}{10},\ B = -\dfrac{3}{10},\ C = \dfrac{1}{6},\ D = -\dfrac{1}{15}$ となり，①から，

$-\dfrac{1}{20}\log(y^2+1) - \dfrac{3}{10}\tan^{-1} y + \dfrac{1}{6}\log|y-1| - \dfrac{1}{15}\log|y+2| = -\dfrac{1}{x} + C.$

よって求める解は

$$\frac{(y-1)^{10}}{(y^2+1)^3(y+2)^4} = Ce^{-\frac{60}{x}+18\tan^{-1} y} \text{ (C は任意定数).}$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1)　変数分離形より一般解は $\displaystyle\int \frac{1}{y(y-2)}\,dy = \int dx$．左辺において $\dfrac{1}{y(y-2)} = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y-2}\right)$ と部分分数分解できるので

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-2}{y}\right| = x + C_1 \quad (C_1\text{は積分定数})$$

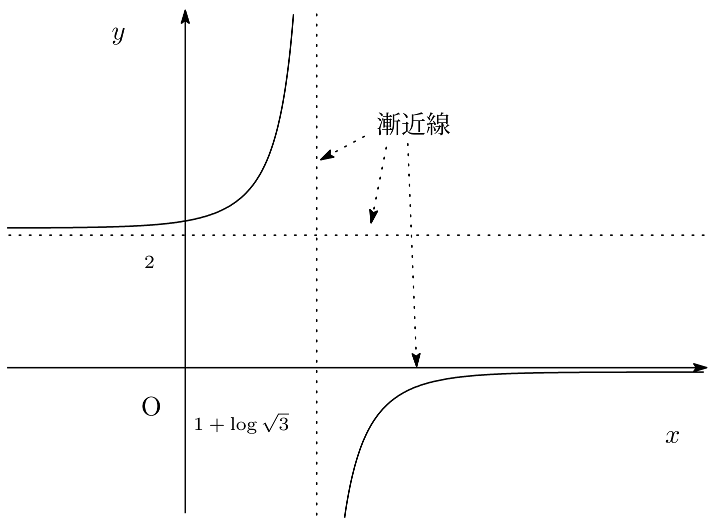
$C = \pm e^{2C_1}$ とおくと解は

$$y = \frac{2}{1-Ce^{2x}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

(2) $y(1) = 3$ より $C = \dfrac{1}{3e^2}$．よって $y = \dfrac{6e^2}{3e^2 - e^{2x}}$．定義域は $3e^2 - e^{2x} \neq 0$ から $x \neq 1 + \log\sqrt{3}$．$y' = \dfrac{12e^{2(1+x)}}{(3e^2-e^{2x})^2} > 0$ より単調増加．さらに，

$$\lim_{x\to-\infty} y = 2, \qquad \lim_{x\to\infty} y = 0,$$
$$\lim_{x\to(1+\log\sqrt{3})+0} y = -\infty, \quad \lim_{x\to(1+\log\sqrt{3})-0} y = +\infty$$

より漸近線は $x = 1 + \log\sqrt{3},\ y = 0,\ y = 2$ である．よってグラフは



12 (1) $x^2y' + 2xy = (x^2y)'$ より $(x^2y)' = 1$ なので両辺を x で積分すると $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^2}$ (C は任意定数). よって,

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}\right) = 0.$$

(2) $y(1) = y(2)$ より, $1 + C = \dfrac{1}{2} + \dfrac{C}{4}$. これを解いて $C = -\dfrac{2}{3}$. よって解は $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{3x^2}$.

(3) $y' = \dfrac{-3x+4}{3x^3}$ より, $y' = 0$ を満たす x は $x = \dfrac{4}{3}$.

このとき増減表

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$	$\frac{3}{8}$	$\searrow$

と $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+0} y(x) = -\infty$ から, 右のグラフとなる.