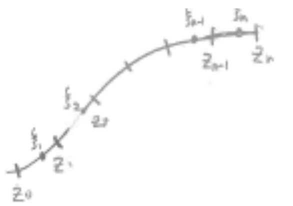
応用数学問題集 5 章 C 問題詳解　(最終稿)

C　発展問題

解答

$\boxed{49}$　曲線 C を $z=z(t)$　$(a \le t \le b)$ として，C 上に始点から順に終点に向かう様に順に点 $z_0=z(a), z_1, z_2, \cdots, z_n=z(b)$ をとり C を n 個の弧に分割する。この分割 Δ を C 上で z_{k-1} と z_k の間に点 ξ_k $(1 \le k \le n)$　を取る。



三角不等式を用いて,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|f(\xi_k)\right|\cdot\left|z_k - z_{k-1}\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} M\left|z_k - z_{k-1}\right| = M\sum_{k=1}^{n}\left|z_k - z_{k-1}\right|$$

$|\Delta| \to 0$ とすると, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \to \int_C f(z)dz$ となるので,

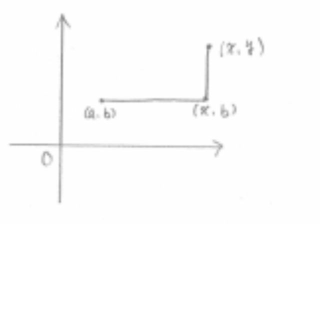
$\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})\right| \to \left|\int_C f(z)dz\right|$　また $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left|z_k - z_{k-1}\right| \to L$ だから

$\displaystyle\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML$ が成り立つ。　■

$\boxed{50}$

与えられた２変数関数 $u(x,y)$ に対し，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が正則関数となるような２変数関数 $v(x,y)$ が存在するなら,任意の実数 a , b に対し,

$v(x,y)-v(a,b)=\{v(x,y)-v(x,b)\}-\{v(x,b)-v(a,b)\}$



$$=\int_b^y v_y(x,t)dt+\int_a^x v_x(s,b)ds$$

$$=\int_b^y u_x(x,t)dt-\int_a^x u_y(s,b)ds$$ （コーシーーリーマンの方程式より）

$v(x,y)=v(a,b)-\int_a^x u_y(s,b)ds+\int_b^y u_x(x,t)dt$ が成り立つ。

そこで,任意の実数 v_0 , a , b に対し, $v(x,y)=v_0-\int_a^x u_y(s,b)ds+\int_b^y u_x(x,t)dt$ と定める。

$$v_x(x,y)=-\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x u_y(s,b)ds+\frac{\partial}{\partial x}\int_b^y u_x(x,t)dt$$

$$=-u_y(x,b)+\int_b^y u_{xx}(x,t)dt$$

$$=-u_y(x,b)-\int_b^y u_{yy}(x,t)dt$$ （仮定 $u_{xx}+u_{yy}=0$ より）

$$=-u_y(x,b)-[u_y(x,t)]_{t=b}^{t=y}=-u_y(x,y)$$

$$v_y(x,y)=-\frac{\partial}{\partial y}\int_a^x u_y(s,b)ds+\frac{\partial}{\partial y}\int_b^y u_x(x,t)dt=0+u_x(x,y)=u_x(x,y)$$

以上より任意の $z=x+iy$ に対し $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ と定めると,コーシー・リーマンの方程式 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ が満たされるので, $f(z)$ は正則関数となり、$u(x,y)$ はその実部となる。

■

$\boxed{51}$ $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ と定める。 $z^4+1=0$ の解は, $z^4=-1=e^{i\pi}$ を解いて

$z_k=e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4})i}$ $(k=0,1,2,3)$ このうち上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ にあるものは,

$z_0=e^{\frac{\pi}{4}i}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $z_1=e^{\frac{3}{4}\pi i}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$ のみ。 留数に関する要項(3)を用いて

$\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},z_k]=\mathrm{Res}[\dfrac{e^{iz}}{z^4+1},z_k]=\dfrac{e^{iz_k}}{4z_k^3}=\dfrac{1}{4}z_k^{-3}e^{iz_k}$ となるので,

$$\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},z_0]=\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+i\sin\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\mathrm{Res}[f(z)e^{iz}, z_1] = \frac{1}{4}e^{-\frac{9\pi}{4}i} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot(\cos\frac{1}{\sqrt{2}} - i\sin\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ より,要項の実積分の計算(2)(ⅱ)を用いて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i\,(\mathrm{Res}[f(z)e^{iz}, z_0] + \mathrm{Res}[f(z)e^{iz}, z_1])$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}(\cos\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\frac{1}{\sqrt{2}})$$

すなわち, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^4+1}dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}(\cos\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\frac{1}{\sqrt{2}})$　両辺の実部をとれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}(\cos\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\frac{1}{\sqrt{2}})$$

■