応用数学問題集 第６章
確率・統計 Ｃ問題解答

103 (1) 求める確率は

$$p_0 = \frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3} = \frac{10}{56} = \mathbf{\frac{5}{28}}, \qquad p_1 = \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3} = \frac{30}{56} = \mathbf{\frac{15}{28}},$$

$$p_2 = \frac{{}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3} = \mathbf{\frac{15}{56}}, \qquad p_3 = \frac{{}_3\mathrm{C}_3 \cdot {}_5\mathrm{C}_0}{{}_8\mathrm{C}_3} = \mathbf{\frac{1}{56}}. \qquad \square$$

(2) 求める金額の期待値は

$$0 \times \frac{5}{28} + 100 \times \frac{15}{28} + 200 \times \frac{15}{56} + 300 \times \frac{1}{56} = \frac{6300}{56} = \frac{225}{2} = \mathbf{112.5}\,[\text{円}]$$

(3) 求める確率は

$$q_0 = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \mathbf{\frac{125}{512}}, \qquad q_1 = {}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{5}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{8}\right) = \mathbf{\frac{225}{512}},$$

$$q_2 = {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{5}{8}\right) \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \mathbf{\frac{135}{512}}, \qquad q_3 = \left(\frac{3}{8}\right)^3 = \mathbf{\frac{27}{512}}. \qquad \square$$

(4) 求める赤玉の出る回数の期待値は

$$0 \times \frac{125}{512} + 1 \times \frac{225}{512} + 2 \times \frac{135}{512} + 3 \times \frac{27}{512} = \frac{576}{512} = \frac{9}{8} = \mathbf{1.125}\,[\text{回}]$$

[別解] (4) 赤玉が出る回数は二項分布 $B\left(3, \dfrac{3}{8}\right)$ に従うので，その期待値は公式（112 p の要項を参照）より

$$3 \times \frac{3}{8} = \frac{9}{8} = \mathbf{1.125}\,[\text{回}]$$

$\boxed{\textbf{104}}$ (1) グーが 1 人でチョキが 3 人出す確率はグーをを出す人の決め方が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通りあるので

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{4}{81}$$

である．その他，チョキが 1 人でパーが 3 人，パーが 1 人でグーが 3 人の場合もあるから求める確率は

$$\frac{4}{81}\times 3 = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{27}} \qquad \square$$

(2) 求める確率は余事象の確率の考えより

$$1-\frac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4} = 1-\frac{10\times 10}{210} = \frac{110}{210} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{21}}$$

(3) つぼから玉を 1 個取り出したとき，白い玉である事象を A とし，つぼに白い玉が 3 個入っている事象を B とするとき，求める確率は事象 A が起きたときの事象 B の起きる条件付き確率 $P_A(B)$ であるから，その確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{5}\times\frac{0}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$$

$\boxed{\textbf{105}}$ (1) B と E が独立であるから，B と $\overline{E}$ も独立であり，これと確率の乗法定理より

$$\begin{aligned}
P(A\cap B\cap E) &= P(A|B\cap E)P(B\cap E) = P(A|B\cap E)P(B)P(E)\\
&= 0.9\times 0.2\times 0.1 = 0.018\\
P(A\cap B\cap \overline{E}) &= P(A|B\cap \overline{E})P(B\cap \overline{E}) = P(A|B\cap \overline{E})P(B)P(\overline{E})\\
&= P(A|B\cap \overline{E})P(B)\{1-P(E)\} = 0.7\times 0.2\times 0.9 = 0.126
\end{aligned}$$

$A\cap B\cap E$ と $A\cap B\cap \overline{E}$ は互いに排反でその和事象は $A\cap B$ だから

$$P(A\cap B) = P(A\cap B\cap E) + P(A\cap B\cap \overline{E}) = 0.018 + 0.126 = 0.144$$

これより，

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.144}{0.36}=\mathbf{0.4}$$

(2)　4 個の事象 $A\cap B\cap E$ と $A\cap B\cap\overline{E}$ と $A\cap\overline{B}\cap E$ と $A\cap\overline{B}\cap\overline{E}$ は互いに排反でその和事象は A であるから

$$P(A)=P(A\cap B\cap E)+P(A\cap B\cap\overline{E})+P(A\cap\overline{B}\cap E)+P(A\cap\overline{B}\cap\overline{E})$$

また，問 1 と同様にして

$$\begin{aligned}P(A\cap\overline{B}\cap E)&=P(A|\overline{B}\cap E)P(\overline{B}\cap E)=P(A|\overline{B}\cap E)P(\overline{B})P(E)\\&=P(A|\overline{B}\cap E)\{1-P(B)\}P(E)=0.9\times0.8\times0.1=0.072\end{aligned}$$

これらのことより，

$$\begin{aligned}P(A\cap\overline{B}\cap\overline{E})&=P(A)-P(A\cap B\cap E)-P(A\cap B\cap\overline{E})-P(A\cap\overline{B}\cap E)\\&=0.36-0.018-0.126-0.072=0.144\end{aligned}$$

よって

$$P(A|\overline{B}\cap\overline{E})=\frac{P(A\cap\overline{B}\cap\overline{E})}{P(\overline{B}\cap\overline{E})}=\frac{0.144}{P(\overline{B})P(\overline{E})}=\frac{0.144}{0.8\times0.9}=\mathbf{0.2}$$

(3) 確率の乗法定理より

$$\begin{aligned}P(R\cap E)&=P(R|E)P(E)=1\times0.1=0.1\\P(R\cap\overline{E})&=P(R|\overline{E})P(\overline{E})=0.1\times0.9=0.09\end{aligned}$$

2 つの事象 $A\cap B\cap R\cap E$ と $A\cap B\cap R\cap\overline{E}$ は互いに排反でその和事象が $A\cap B\cap R$ であることと，$A\cap B$ と $R\cap E$ および $A\cap B$ と $R\cap\overline{E}$ が互いに独立であること，また，問 1 より $P(A\cap B)=0.144$ であることから，

$$\begin{aligned}P(A\cap B\cap R)&=P(A\cap B\cap R\cap E)+P(A\cap B\cap R\cap\overline{E})\\&=P(A\cap B)P(R\cap E)+P(A\cap B)P(R\cap\overline{E})\\&=P(A\cap B)\times0.1+P(A\cap B)\times0.09\\&=P(A\cap B)\times0.19=0.144\times0.19\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}P(A\cap\overline{B}\cap R)&=P(A\cap\overline{B}\cap R\cap E)+P(A\cap\overline{B}\cap R\cap\overline{E})\\&=P(A\cap\overline{B})P(R\cap E)+P(A\cap\overline{B})P(R\cap\overline{E})\\&=P(A\cap\overline{B})\times 0.1+P(A\cap\overline{B})\times 0.09\\&=P(A\cap\overline{B})\times 0.19=\{P(A)-P(A\cap B)\}\times 0.19\\&=(0.36-0.144)\times 0.19=0.216\times 0.19\end{aligned}$$

$A\cap B\cap R$ と $A\cap\overline{B}\cap R$ は互いに排反でその和事象は $A\cap R$ だから

$$P(A\cap R)=P(A\cap B\cap R)+P(A\cap\overline{B}\cap R)=(0.144+0.216)\times 0.19=0.36\times 0.19$$

これより,

$$P(B|A\cap R)=\frac{P(A\cap B\cap R)}{P(A\cap R)}=\frac{0.144\times 0.19}{0.36\times 0.19}=\mathbf{0.4}$$

[注意] (3) 上記の解答をよく見ると実は $P(R|E)=1$, $P(R|\overline{E})=0.1$ である必要はなくて $P(R)>0$ でさえあれば, 同じ答えがでる. 以下にその別解を記す.

[別解] (3) $P(R)\geqq P(R\cap E)=P(R|E)P(E)=1\times 0.1=0.1$ より $P(R)>0$.

$$P(B|A\cap R)=\frac{P(A\cap R\cap B)}{P(A\cap R)}=\frac{P(A\cap R\cap B)}{P(A\cap R\cap B)+P(A\cap R\cap\overline{B})}\cdots ①$$

$A\cap B$ と $R\cap E$, $A\cap B$ と $R\cap\overline{E}$ はそれぞれ互いに独立だから

$$\begin{aligned}P(A\cap R\cap B)&=P(A\cap B\cap R\cap E)+P(A\cap B\cap R\cap\overline{E})\\&=P(A\cap B)P(R\cap E)+P(A\cap B)P(R\cap\overline{E})\\&=P(A\cap B)(P(R\cap E)+P(R\cap\overline{E}))=P(A\cap B)P(R)\cdots ②\end{aligned}$$

同様に $A\cap\overline{B}$ と $R\cap E$, $A\cap\overline{B}$ と $R\cap\overline{E}$ はそれぞれ互いに独立だから

$$\begin{aligned}P(A\cap R\cap\overline{B})&=P(A\cap\overline{B}\cap R\cap E)+P(A\cap\overline{B}\cap R\cap\overline{E})\\&=P(A\cap\overline{B})P(R\cap E)+P(A\cap\overline{B})P(R\cap\overline{E})\\&=P(A\cap\overline{B})(P(R\cap E)+P(R\cap\overline{E}))=P(A\cap\overline{B})P(R)\cdots ③\end{aligned}$$

②，③を①に代入すると

$$
\begin{aligned}
P(B|A\cap R) &= \frac{P(A\cap B)P(R)}{\{P(A\cap B)+P(A\cap \bar{B})\}P(R)} \qquad \overset{\text{(1) の結果より}}{\downarrow}\\
&= \frac{P(A\cap B)P(R)}{P(A)P(R)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B|A) = \mathbf{0.4}
\end{aligned}
$$

106 (1) 先に赤玉がなくなるのは，最初に赤玉を取り出す場合と最初に白玉を取り出して次に赤玉を取り出す場合の 2 通りの場合があり，それぞれ排反な事象であるからその確率は

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(2) (1) と同じように考えて解くこともできるが違う解き方をする．赤玉がなくなっても最後まで取り出すことにして，5 個の玉の取り出し方を取り出した順に表記することにすると，次のようになる．

赤赤白白白，　赤白赤白白，　赤白白赤白，　白赤赤白白，　白赤白赤白，
白白赤赤白，　赤白白白赤，　白赤白白赤，　白白赤白赤，　白白白赤赤

この玉の取り出し方の総数は ${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times 4}{2\times 1}=10$ 通りある．この 10 通りの事象は同様に確からしい．このうち，赤玉が先になくなるのは最後が白玉になっている 6 通りである．よって求める確率は

$$\frac{6}{10}=\mathbf{\frac{3}{5}}$$

(3) (2) と同様に赤玉がなくなっても最後まで引くことにして，$n+m$ 個の玉の取り出し方を取り出した順に表記することにすると，その取り出し方の総数は $m+n$ 個の順序づけた箱に赤玉 n 個を配置し，残りの n 個の箱に白玉を配置する場合の数と等しく，

$${}_{m+n}\mathrm{C}_n=\frac{(m+n)!}{m!\;n!}$$

であり，これらの事象は同様に確からしいと考えられる．このうち，赤玉が先

になくなるのは最後が白玉になっている場合なのでそのような取り出し方の総数は，最後の箱を除く $m+n-1$ 個の順序づけた箱に赤玉 n 個を配置し，残りの $n-1$ 個の箱に白玉を配置する場合の数と等しく，

$$ {}_{m+n-1}\mathrm{C}_n = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!} $$

である．よって求める確率は

$$ \frac{{}_{m+n-1}\mathrm{C}_n}{{}_{m+n}\mathrm{C}_n} = \frac{\dfrac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}}{\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}} = \frac{(m+n-1)!\,n!}{(m+n)!\,(n-1)!} = \frac{n}{m+n} $$

である．

[注意] (3) の確率はつぎのように求めることもできる．最後に白玉を取り出す確率であるが，これは最初に白玉を取り出す確率に等しいと考えることもできる．よって求める確率は

$$ \frac{\text{白玉の数}}{\text{すべての玉の数}} = \frac{n}{m+n} $$

$\boxed{\textbf{107}}$ 以下において自然数 k に対して k 回目に出た正八面体のさいころの目の数を a_k とすると，x_n は

$$ x_n = 0.a_1a_2a_3\cdots a_n $$

と表される．

(1) $\frac{8}{33} = 0.242424\cdots = 0.\dot{2}\dot{4}$ であるから，$x_2 = 0.a_1a_2 < \frac{8}{33}$ となるのは「$a_1 = 0,\,1$」または「$a_1 = 2$ かつ $0 \leqq a_2 \leqq 4$」の場合なので求める確率 p_2 は

$$ p_2 = \frac{2}{8} + \frac{5}{8^2} = \mathbf{\frac{21}{64}} $$

(2) $x_n < \frac{8}{33}$ となるのは次の 2 通りの場合が考えられる．

（ア）$x_{n-2} < \frac{8}{33}$ かつ $x_{n-2} \neq 0.\overbrace{2424\cdots24}^{24\text{ が }\frac{n-2}{2}\text{ 個}}$ のとき，このとき，a_{n-1} と a_n

はどの数字が出てもよい.

（イ） $x_{n-2}=0.\overbrace{2424\cdots24}^{24\text{ が }\frac{n-2}{2}\text{ 個}}$ のとき,「$a_{n-1}=0,1$」または「$a_{n-1}=2$ かつ $0\leqq a_n\leqq 4$」でなければならない.

これらより，n が 4 以上の偶数のとき，次の漸化式が成立する.

$$\begin{aligned} p_n &= \left(p_{n-2}-\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)\times 1+\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{n-2}{2}}\times\frac{21}{64} \\ &= p_{n-2}-\left(\frac{1}{8}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{8}\right)^{n-2}\times\frac{21}{64} \\ &= p_{n-2}-\frac{43}{8^n} \end{aligned}$$

以上より，求める漸化式は

$$p_n=p_{n-2}-\frac{43}{8^n}\qquad\cdots①$$

(3) （2）の漸化式を

$$p_n-\frac{\alpha}{8^n}=p_{n-2}-\frac{\alpha}{8^{n-2}}$$

と変形できたとする．このとき

$$\frac{63\alpha}{8^n}=\frac{43}{8^n}$$

でなければならないので，$\alpha=\dfrac{43}{63}$ となる．この漸化式より,

$$p_n-\frac{\alpha}{8^n}=p_2-\frac{\alpha}{8^2}=\frac{21}{64}-\frac{43}{63\cdot64}=\frac{20}{63}$$

となる．これより

$$p_n=\frac{43+20\cdot8^n}{63\cdot8^n}$$

[別解] (3) 次のように解く方が自然かもしれない.

(2) の漸化式①は $p_n-p_{n-2}=-\dfrac{43}{8^n}$ と変形できるから，n が 4 以上の偶数のとき

$$
\begin{aligned}
p_n &= (p_n - p_{n-2}) + (p_{n-2} - p_{n-4}) + \cdots + (p_6 - p_4) + (p_4 - p_2) + p_2 \\
&= \underbrace{-\frac{43}{8^n} - \frac{43}{8^{n-2}} - \cdots - \frac{43}{8^6} - \frac{43}{8^4}}_{\left(\frac{n}{2}-1\right)\text{個}} + \frac{21}{64} \\
&\overset{*}{=} -\frac{43}{8^4} \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{1}{8^2}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{1 - \dfrac{1}{8^2}} + \frac{21}{64} = \frac{20 \cdot 8^n + 43}{8^n \cdot 63} \quad \leftarrow * \text{：等比数列の和の公式}
\end{aligned}
$$

これは $n = 2$ のときにも成立する．

108 (1) $P(X = 1) = \dfrac{1}{6}$, $\quad P(X = 2) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{36}$

(2) $X = n$ となるのは $n - 1$ 回目までは 1 以外の目が出て，n 番目に初めて 6 が出る場合である．よって

$$
P(X = n) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{5^{n-1}}{6^n}
$$

(3) 求める期待値は無限級数の和

$$
E[X] = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{5}{6^2} + \cdots n \times \frac{5^{n-1}}{6^n} + \cdots
$$

であるが $\dfrac{5}{6} = r$ とおき，この級数の第 n 部分和を S_n とおくと

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{6}(1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}) \\
rS_n &= \frac{1}{6}(\qquad r + 2r^2 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n)
\end{aligned}
$$

となるので辺々引くと

$$
\begin{aligned}
(1 - r)S_n &= \frac{1}{6}(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1 - r^n}{1 - r} - nr^n\right) = \frac{1 - (n+1)r^n + nr^{n+1}}{6(1 - r)}
\end{aligned}
$$

となる．これより，

$$S_n = \frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{6(1-r)^2} \overset{1-r=\frac{1}{6}}{\underset{\downarrow}{=}} 6\{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}\}$$

となる．$0 < r < 1$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0 \cdots ①$ であるから求める期待値は

$$E[X] = \lim_{n\to\infty} 6\{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}\} = \mathbf{6}$$

[注意] (3) の①は次のように証明できる．

[証明] $0 < r < 1$ より $r = \dfrac{1}{1+h}$ とおくと $h > 0$ である．２項定理を用いると $n \geqq 2$ のとき

$$0 < nr^n = \frac{n}{(1+h)^n} = \frac{n}{1 + {}_n\mathrm{C}_1 h + {}_n\mathrm{C}_2 h^2 + \cdots + h^n} < \frac{n}{\dfrac{n(n-1)}{2}h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2}$$

であり，$n \to \infty$ とすると $\dfrac{2}{(n-1)h^2} \to 0$ となるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$$

が成り立つ． □

$\boxed{\mathbf{109}}$ (1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

(2) $E[X] = \mu$ とおくと $E[X] = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

$$\begin{aligned} V[X] &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n}({x_i}^2 - 2\mu x_i + \mu^2)p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 p_i - 2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i p_i + \mu^2\sum_{i=1}^{n}p_i = \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 p_i - 2\mu\cdot\mu + \mu^2\cdot 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 p_i - \mu^2 = \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i p_i\right)^2 \end{aligned}$$

(3) $I = \{i \,|\, |x_i - \mu| \geqq k\}$ とおくと任意の i について $(x_i-\mu)^2 p_i \geqq 0$ である

から

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i \geqq \sum_{i \in I} (x_i - \mu)^2 p_i$$
$$\geqq \sum_{i \in I} k^2 p_i = k^2 \sum_{i \in I} p_i = k^2 P(|X - \mu| \geqq k)$$

したがって

$$\sigma^2 \geqq k^2 P(|X - \mu| \geqq k) \qquad \square$$

(4) (3) の不等式に $\mu = 50,\ \sigma^2 = 9$ を代入し，特に $k = 10$ の場合を考えると

$$9 \geqq 10^2 P(|X - 50| \geqq 10) \quad \text{よって}, P(|X - 50| \geqq 10) \leqq \frac{9}{100}$$

「$40 < X < 60$」の余事象は「$|X - 50| \geqq 10$」であるから

$$P(40 < X < 60) = 1 - P(|X - 50| \geqq 10) \geqq 1 - 0.09 = 0.91$$

まとめると

$$P(40 < X < 60) \geqq 0.91$$

$\boxed{\textbf{110}}$ (1) 表の出る回数を T とおくと T は二項分布 $B(6, \frac{1}{2})$ に従う．点 P の座標を X とおくと

$$X = 4T - 2(6 - T) = 6T - 12$$

が成り立つ.

(a) $X = 6T - 12 = 0$ より $T = 2$．よって求める確率は

$${}_6\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \mathbf{\frac{15}{64}}$$

(b) T は二項分布 $B(6, \frac{1}{2})$ に従う．よって $E[T] = 6 \times \frac{1}{2} = 3$．したがって点 P の座標 X の期待値は

$$E[X] = 6E[T] - 12 = 6 \times 3 - 12 = \mathbf{6}$$

[注意] X の確率分布の表を書くことによって求めることもできる．すなわち

T	0	1	2	3	4	5	6
X	-12	-6	0	6	12	18	24
確率	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

これより

$$\begin{aligned}E[X] &= (-12)\times\frac{1}{64}+(-6)\times\frac{6}{64}+0\times\frac{15}{64}\\&\quad+6\times\frac{20}{64}+12\times\frac{15}{64}+18\times\frac{6}{64}+24\times\frac{1}{64}=\frac{384}{64}=\mathbf{6}\end{aligned}$$

(2) 表の出る回数を T とおくと T は二項分布 $B(5,\frac{1}{2})$ に従う．点 P の座標を X とおくと

$$X = T-(5-T) = 2T-5$$

が成り立つ.

(a) 二項分布の期待値の公式より $E[T]=5\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$．よって，点 P の座標 X の期待値は

$$E[X] = 2E[T]-5 = 2\times 2.5-5 = \mathbf{0}$$

また，$X=2T-5=0$ より $T=2.5$．T は整数でないからこのようになることはありえない．よって点 P がその期待値の座標の上に在る確率は $\mathbf{0}$.

(b) T は二項分布 $B(5,\frac{1}{2})$ に従うので T および，X のとる値とその確率の対応を表にすると，

T	0	1	2	3	4	5
X	-5	-3	-1	1	3	5
確率	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

これより，原点から点 P までの距離 $|X|$ の期待値は

$$E\left[|X|\right] = 5\times\frac{2}{32}+3\times\frac{10}{32}+1\times\frac{20}{32}=\frac{60}{32}=\mathbf{\frac{15}{8}}$$

(c) Y をこのルールでの点 P の座標とする．$m=1,2,3,4,5$ について m 回目が表のとき $a_m=1$，m 回目が裏のとき $a_m=-1$ と定め，$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$

とおく．m 回目が表裏どちらも取り得る場合のとき $a_m = *$ と表すことにする．
次の場合が考えられる．

(あ) $Y = 0$ となるのは次の場合である．

$$\begin{aligned}\mathbf{a} =&(-1,*,*,*,*),\quad (1,-1,-1,*,*),\quad (1,-1,1,-1,-1),\\&(1,1,-1,-1,-1)\end{aligned}$$

このときの確率は $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{2}{32}=\dfrac{22}{32}$

(い) $Y = 1$ となるのは次の場合である．

$$\begin{aligned}\mathbf{a} =&(1,-1,1,-1,1),\quad (1,-1,1,1,-1),\quad (1,1,1,-1,-1),\\&(1,1,-1,1,-1),\quad (1,1,-1,-1,1)\end{aligned}$$

このときの確率は $\dfrac{5}{32}$

(う) $Y = 3$ となるのは次の場合である．

$$\mathbf{a} = (1,-1,1,1,1),\quad (1,1,-1,1,1),\quad (1,1,1,-1,1),\quad (1,1,1,1,-1)$$

このときの確率は $\dfrac{4}{32}$

(え) $Y = 5$ となるのは次の場合である．

$$\mathbf{a} = (1,1,1,1,1)$$

このときの確率は $\dfrac{1}{32}$

以上より，求める Y の期待値は

$$E[Y] = 0\times\frac{22}{32}+1\times\frac{5}{32}+3\times\frac{4}{32}+5\times\frac{1}{32}=\frac{22}{32}=\mathbf{\frac{11}{16}}$$

$\boxed{\mathbf{111}}$ (1) $P = (p_{ij})$ と行列で表せば，

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{6}{11} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{11} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{12} & 0 \end{pmatrix}$$

(2) n 回の移動後に初めて状態 3 に到達する確率を r_n で表す．n 回の移動後に初めて状態 3 になる場合，$n-1$ 回目までの移動では状態 1 または状態 2 のどちらかになり，n 回目の移動で状態 3 になる．そこで 0 以上の整数 k について k 回目までの移動では状態 1 または状態 2 のどちらかにあり，k 回目の移動で状態 1 になる確率を p_k，状態 2 になる確率を q_k とおく．すると，0 以上の整数 k について次の漸化式が成り立つ．

$$p_{k+1} = \frac{1}{4}q_k, \qquad q_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}q_k \cdots ①$$

この 2 式より

$$p_{k+1} + \alpha q_{k+1} = \beta(p_k + \alpha q_k) \cdots ②$$

が成り立つような α, β を求める．①，② より p_{k+1}, q_{k+1} を消去しすると

$$\frac{1}{4}q_k + \left(\frac{\alpha}{3}p_k + \frac{\alpha}{3}q_k\right) = \beta p_k + \alpha\beta q_k$$

この式において p_k, q_k の係数を比較すると

$$\frac{\alpha}{3} = \beta, \qquad \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{4} = \alpha\beta$$

この連立方程式を解くと

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$$

を得る．

(i) $(\alpha, \beta) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき，$p_{k+1} + \frac{3}{2}q_{k+1} = \frac{1}{2}\left(p_k + \frac{3}{2}q_k\right)$ となるがこれと $p_0 = 1, q_0 = 0$ を用いると

$$p_{n-1} + \frac{3}{2}q_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_0 + \frac{3}{2}q_0\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots ③$$

(i) $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ のとき，$p_{k+1} - \frac{1}{2}q_{k+1} = -\frac{1}{6}\left(p_k - \frac{1}{2}q_k\right)$ となるがこれと $p_0 = 1, q_0 = 0$ を用いると

$$p_{n-1} - \frac{1}{2}q_{n-1} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(p_0 - \frac{1}{2}q_0\right) = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdots ④$$

$(③+3\times④)\div 4$，$(③-④)\div 2$ より

$$p_{n-1}=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+3\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\},\quad q_{n-1}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

を得る．よって，自然数 n について求める確率 r_n は

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{5}{12}q_{n-1} \\ &= \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+3\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}+\frac{5}{24}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{7}{24}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdots⑤ \end{aligned}$$

[注意] 連立漸化式①より，一般項を求める方法として上記の方法の他に，係数の行列を対角化し，行列の n 乗を求めて解く方法と p_k または q_k の一方を消去して二項間漸化式に帰着させる方法がある．

112 (1) 平均 0，標準偏差 1 の正規分布の確率密度関数を $f(x)$ とおくと

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

であるから

$$E[Z]=E[|X|]+E[|Y|]=2E[|X|]=2\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)\,dx \quad \leftarrow |x|f(x) \text{ は偶関数}$$

$$=4\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty}=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}(-0+1)=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

次に X と Y は互いに独立だから，$|X|$ と $|Y|$ も互いに独立であり

$$V[Z]=V[|X|]+V[|Y|]=2V[|X|]=2\left\{E[X^2]-(E[|X|])^2\right\} \quad \leftarrow |X|^2=X^2 \text{ に注意}$$

$$\begin{aligned} &=2\cdot 2\int_0^{\infty}x^2f(x)\,dx-2\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}x\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'\,dx-\frac{4}{\pi} \\ &=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right\}-\frac{4}{\pi} \\ &\overset{*}{=}\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\left(0-0+\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)-\frac{4}{\pi}=2-\frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

等号 ∗：ロピタルの定理より $\leftarrow \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{\frac{x^2}{2}}}=0$

[別解] $V[Z]$ については次のような解答もある．$|X|$ と $|Y|$ も互いに独立であるから

$$V[Z] = V[|X|] + V[|Y|] = 2V[|X|] = 2\left\{E[|X|^2] - (E[|X|])^2\right\}$$
$$= 2\left\{E[X^2] - (E[|X|])^2\right\} \cdots ① \qquad \leftarrow |X|^2 = X^2 \text{ に注意}$$

ここで前半より $E[|X|] = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ である．また，問題の仮定から $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 1$ かつ $E[X] = 0$ であり，これより $E[X^2] = 1$．これらを①に代入すると

$$V[Z] = 2\left\{E[X^2] - (E[|X|])^2\right\} = 2(1 - \frac{2}{\pi})$$

(2) X の累積分布関数を $F(x)$ とおく．W の累積分布関数を $G(w)$（すなわち，$P(W \leqq w) = G(w)$）とおき，W の確率密度関数を $g(w)$ とおく．X と Y は互いに独立だから，$w \geqq 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
G(w) &= P(W \leqq w) = P(\max(|X|, |Y|) \leqq w) \\
&= P(-w \leqq X \leqq w,\ \text{かつ},\ -w \leqq Y \leqq w) \\
\text{X と Y は独立だから} \rightarrow &= P(-w \leqq X \leqq w)P(-w \leqq Y \leqq w) \\
&= 2P(0 \leqq X \leqq w) \cdot 2P(0 \leqq Y \leqq w) \\
&= 4\{F(w) - F(0)\}^2
\end{aligned}$$

これより，↓ 等号$*$については C 問題 119 の解答参照

$$g(w) \overset{*}{=} G'(w) = 8\{F(w) - F(0)\}\{F(w) - F(0)\}' = 8\{F(w) - F(0)\}f(w)$$

また，$w < 0$ のとき，$G(w) = 0$ であり，$g(w) = G'(w) = 0$．これらより，

16

$$
\begin{aligned}
E[W] &= \int_{-\infty}^{\infty} wg(w)\,dw = \int_0^{\infty} 8w\{F(w)-F(0)\}f(w)\,dw \\
&= \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} we^{-\frac{w^2}{2}}\{F(w)-F(0)\}\,dw \\
&= \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} \left(-e^{-\frac{w^2}{2}}\right)'\{F(w)-F(0)\}\,dw \\
&= \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\left(-e^{-\frac{w^2}{2}}\right)\{F(w)-F(0)\}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-e^{-\frac{w^2}{2}}\right)f(w)\,dw\right\} \\
&= \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\left\{0\times\frac{1}{2}-(-1)\times 0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-w^2}\,dw\right\} \quad \leftarrow F(\infty)=1,\ F(0)=\frac{1}{2} \\
&= \frac{8}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}
$$

[別解] 平面の領域 D_1, D_2 を

$$D_1 = \{(x,y)\,|\,|x| \geqq |y|\}, \quad D_2 = \{(x,y)\,|\,|y| \geqq |x|\}$$

とおく．X と Y は互いに独立であるから，

$$
\begin{aligned}
E[W] &= \iint_{\mathbb{R}^2} \max(|x|,|y|)f(x)f(y)\,dxdy \\
&= \iint_{D_1} |x|f(x)f(y)\,dxdy + \iint_{D_2} |y|f(x)f(y)\,dxdy \cdots ①
\end{aligned}
$$

ここで①の 2 個の重積分の値は対称性により，等しい．よって

$$
\begin{aligned}
E[W] &= 2\iint_{D_1} |x|f(x)f(y)\,dxdy \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x|f(x)\left\{\int_{-|x|}^{|x|} f(y)\,dy\right\}}\,dx && \leftarrow \text{波線部分は } x \text{ の偶関数} \\
&= 4\int_0^{\infty} xf(x)\left\{\int_{-x}^{x} f(y)\,dy\right\}\,dx && \leftarrow f(y) \text{ は } y \text{ の偶関数} \\
&= 8\int_0^{\infty} xf(x)\left\{\int_0^{x} f(y)\,dy\right\}\,dx \\
&= \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\left\{\int_0^{x} f(y)\,dy\right\}\,dx \\
&= \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'\left\{\int_0^{x} f(y)\,dy\right\}\,dx && \frac{d}{dx}\int_0^x f(y)\,dy = f(x) \\
& && \downarrow \\
&= \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left\{\int_0^{x} f(y)\,dy\right\}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)f(x)\,dx\right\} \\
&= \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\left\{0\cdot\frac{1}{2} - (-1)\cdot 0 + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}f(x)\,dx\right\} \\
&= \frac{8}{2\pi}\left\{\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right\} && \leftarrow \text{指数法則 } e^a\cdot e^b = e^{a+b} \text{ を利用} \\
&= \frac{8}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{113}}$ (1) バスの時間を知らずに来る人が x 分から $x+dx$ 分の間に来る確率は $\dfrac{1}{60}dx$ であると考えることができる．このときの待ち時間は $(60-x)$ 分である．よって，求める待ち時間の期待値は

$$
\int_0^{60}(60-x)\frac{1}{60}\,dx = \frac{1}{60}\left[60x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{60} = \frac{1}{60}\left(60^2 - \frac{60^2}{2}\right) = 30
$$

よって，求める待ち時間の期待値は **30** 分.

(2) 求める確率は

$$
\int_0^{25}\frac{1}{60}\,dx = \left[\frac{x}{60}\right]_0^{25} = \frac{25}{60} = \mathbf{\frac{5}{12}}
$$

(3) 求める期待値は

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int_0^x (x-t)\frac{1}{60}\,dt + \int_x^y (y-t)\frac{1}{60}\,dt + \int_y^{60} (60-t)\frac{1}{60}\,dt \\
&= \frac{1}{60}\left\{\left[xt-\frac{t^2}{2}\right]_0^x + \left[yt-\frac{t^2}{2}\right]_x^y + \left[60t-\frac{t^2}{2}\right]_y^{60}\right\} \\
&= \frac{1}{60}\left\{\frac{x^2}{2} + \left(\frac{y^2}{2}-xy+\frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{60^2}{2}-60y+\frac{y^2}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{60}\left(x^2-xy+y^2-60y+1800\right)
\end{aligned}$$

(4) $f(x,y)$ の領域 $D : 0 < x < y < 60$ における最小値を求めればよい．$f(x,y)$ を平方完成すると

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{60}\left\{\left(x-\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 - 60y + 1800\right\} \\
&= \frac{1}{60}\left\{\left(x-\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y^2-80y) + 1800\right\} \\
&= \frac{1}{60}\left\{\left(x-\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-40)^2 + 600\right\} \geqq \frac{600}{60} = 10
\end{aligned}$$

ここで，等号が成り立つのは $x-\dfrac{y}{2}=0$ かつ $y-40=0$ すなわち $(x,y)=(20,40)$ のときであり，$(20,40)$ は領域 D に属するので $f(x,y)$ に最小値 10 を与える．以上により，

$(x,y)=(\mathbf{20},\mathbf{40})$ のとき，$f(x,y)$ は最小値 $\mathbf{10}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{114}}$ (1) 題意より $E[X]=E[Y]=0,\ V[X]=V[Y]=\sigma^2$．これより S, T の期待値は

$$\begin{aligned}
E[S] &= E[X]\cos\lambda s + E[Y]\sin\lambda s = 0\cos\lambda s + 0\sin\lambda s = \mathbf{0} \\
E[T] &= E[X]\cos\lambda(s+t) + E[Y]\sin\lambda(s+t) \\
&= 0\cos\lambda(s+t) + 0\sin\lambda(s+t) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

また，S, T の分散は X, Y が互いに独立であるから，

$$\begin{aligned} V[S] &= V[X]\cos^2\lambda s + V[Y]\sin^2\lambda s = \sigma^2(\cos^2\lambda s + \sin^2\lambda s) = \sigma^2 \\ V[T] &= V[X]\cos^2\lambda(s+t) + V[Y]\sin^2\lambda(s+t) \\ &= \sigma^2(\cos^2\lambda(s+t) + \sin^2\lambda(s+t)) = \sigma^2 \end{aligned}$$

また，S, T の共分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[S,T] &= E[ST] - E[S]E[T] = E[ST] - 0 \times 0 \\ &= E[X^2]\cos\lambda s\cos\lambda(s+t) + E[Y^2]\sin\lambda s\sin\lambda(s+t) \\ &+ E[XY]\{\cos\lambda s\sin\lambda(s+t) + \sin\lambda s\cos\lambda(s+t)\} \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} E[X^2] &= V[X] + (E[X])^2 = \sigma^2 + 0^2 = \sigma^2 \\ E[Y^2] &= V[Y] + (E[Y])^2 = \sigma^2 + 0^2 = \sigma^2 \\ E[XY] &= E[X]E[Y] = 0 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[S,T] &= \sigma^2\{\cos\lambda s\cos\lambda(s+t) + \sin\lambda s\sin\lambda(s+t)\} + 0 \\ &= \sigma^2\cos\{\lambda(s+t) - \lambda s\} = \sigma^2\cos\lambda t \end{aligned}$$

(2) 求める相関係数は

$$\rho[S,T] = \frac{\mathrm{Cov}[S,T]}{\sqrt{V[S]}\sqrt{V[T]}} = \frac{\sigma^2\cos\lambda t}{\sigma\cdot\sigma} = \cos\lambda t$$

115 (1) X, Y は独立であるから，(X, Y) の同時確率密度関数は $f(x)f(y)$ であり，これは第 1 象限以外では 0 になる．領域 D_1 を

$$D_1 = \{(x,y) | 0 \leqq x < y\}$$

とおくと求める確率 $P(X < Y)$ は

$$
\begin{aligned}
P(X<Y) &= \iint_{D_1} f(x)f(y)\,dxdy = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\left\{\int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y}\,dy\right\}dx \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\left[-e^{-\lambda y}\right]_x^\infty \,dx \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty \lambda e^{-2\lambda x}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}e^{-2\lambda x}\right]_0^\infty = -\frac{1}{2}(0-1) = \mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

(2) $Z=\min\{X,Y\}$ とおき，Z の累積分布関数を $G(z)$，Z の分布密度関数（すなわち，確率密度関数）を $g(z)$ とおく．$z>0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
G(z) &= P(Z \leqq z) = 1-P(Z>z) = 1-P(\min\{X,Y\}>z) \\
&= 1-P(X>z\,\text{かつ}\,Y>z) = 1-P(X>z)P(Y>z) \\
&= 1-\left(\int_z^\infty f(x)\,dx\right)^2 = 1-\left(\int_z^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx\right)^2 \\
&= 1-\left(\left[-e^{-\lambda x}\right]_z^\infty\right)^2 = 1-e^{-2\lambda z}
\end{aligned}
$$

よって，求める分布密度関数 $g(z)$ は $z>0$ のとき，

$$
g(z) = G'(z) = 2\lambda e^{-2\lambda z}
$$

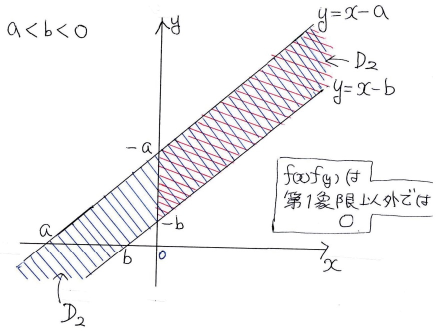
また，$z \leqq 0$ のとき，$G(z)=0$ より，$g(z)=G'(z)=0$．以上をまとめると，求める分布密度関数は

$$
g(z) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda z} & (z>0) \\ 0 & (z \leqq 0) \end{cases}
$$

(3) 平面の領域 D_2 を

$$D_2 = \{(x, y) | a < x - y < b\}$$

とおくと D_2 は右図の斜線部の部分である．第 1 象限以外の部分では同時確率密度関数は 0 であることに注意すると，求める確率 $P(a < X - Y < b)$ は

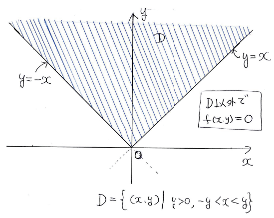


$$\begin{aligned}
P(a < X - Y < b) &= \iint_{D_2} f(x)f(y)\,dxdy \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left\{ \int_{x-b}^{x-a} \lambda e^{-\lambda y}\,dy \right\} dx \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left[-e^{-\lambda y} \right]_{x-b}^{x-a} dx \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left(e^{-\lambda(x-b)} - e^{-\lambda(x-a)} \right) dx \\
&= \int_0^\infty \lambda \left(e^{-\lambda(2x-b)} - e^{-\lambda(2x-a)} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[-e^{-\lambda(2x-b)} + e^{-\lambda(2x-a)} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{\lambda b} - e^{\lambda a} \right)
\end{aligned}$$

116 (1) 求める $|X|$ の期待値は

$$
\begin{aligned}
E[|X|] &= \iint_{\mathbb{R}^2} |x| f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-y}\left\{\int_{-y}^{y} |x|(y-x)\,dx\right\}dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-y}\left\{2\int_0^{y} xy\,dx\right\}dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-y}\left[x^2 y\right]_0^y dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^\infty y^3 e^{-y}\,dy \\
&= \frac{1}{4}\left\{\left[y^3(-e^{-y})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 3y^2 e^{-y}\,dy\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\left[3y^2(-e^{-y})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 6y e^{-y}\,dy\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\left[6y(-e^{-y})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 6 e^{-y}\,dy\right\} = \frac{6}{4}\left[-e^{-y}\right]_0^\infty = \mathbf{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

$|x|x$ は x の奇関数↑ $|x|y$ は x の偶関数



上の積分計算の中で $\lim_{y\to\infty} y^3 e^{-y} = 0$ であることなどを用いた．これは下のようにロピタルの定理を用いて示すことができる．

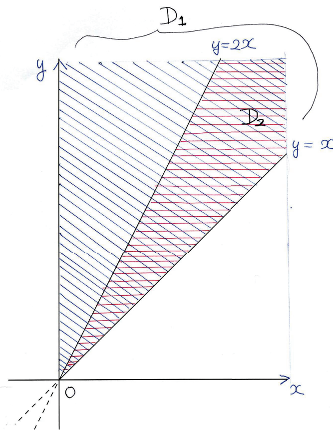
$$
\lim_{y\to\infty} y^3 e^{-y} = \lim_{y\to\infty}\frac{y^3}{e^y} = \lim_{y\to\infty}\frac{3y^2}{e^y} = \lim_{y\to\infty}\frac{6y}{e^y} = \lim_{y\to\infty}\frac{6}{e^y} = 0
$$

(2) 平面の領域 D_1, D_2 を

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y) | y > 0 \text{ かつ } 0 \leqq x \leqq y\} \\
D_2 &= \{(x,y) | y > 0 \text{ かつ } 0 \leqq x \leqq y \leqq 2x\}
\end{aligned}
$$

とおくと確率 $P(X > 0)$ は

$$\begin{aligned}
P(X>0) &= \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{-y}\left\{\int_0^{y}(y-x)\,dx\right\}dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{-y}\left[xy-\frac{x^2}{2}\right]_0^{y} dy \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\infty} y^2 e^{-y}\,dy \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\infty} 2ye^{-y}\,dy \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\infty} 2e^{-y}\,dy \\
&= \frac{2}{8}\left[-e^{-y}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$



と計算できる．また，確率 $P(X>0 \text{ かつ } 0<Y\leqq 2X)$ も同様にして

$$\begin{aligned}
P(X>0 \text{ かつ } 0<Y\leqq 2X) &= \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{-y}\left\{\int_{\frac{y}{2}}^{y}(y-x)\,dx\right\}dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{-y}\left[xy-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{y} dy \\
&= \frac{1}{32}\int_0^{\infty} y^2e^{-y}\,dy = \frac{2}{32}\left[-e^{-y}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

となる．以上より求める条件付き確率は

$$P(0<Y\leqq 2X|X>0) = \frac{P(X>0 \text{ かつ } 0<Y\leqq 2X)}{P(X>0)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

$\boxed{\mathbf{117}}$ (1)

$$\varphi(\theta) = \sum_{i=1}^{n} p_i e^{\theta x_i}$$

であるから，これを θ で微分すると

$$\varphi'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i e^{\theta x_i}, \qquad \varphi''(\theta) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i e^{\theta x_i}$$

この式に $\theta = 0$ を代入すると $e^0 = 1$ であるから

$$\varphi'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \qquad \varphi''(0) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i$$

となり，

$$\varphi'(0) = E[X], \qquad \varphi''(0) = E[X^2]$$

が成り立つ.

(2) 整数 k $(0 \leqq k \leqq n)$ について

$$P(X = k) = {}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{n-k}$$

であるから，二項定理を用いると

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{n-k} e^{k\theta} \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (pe^{\theta})^k (1-p)^{n-k} \\ &= \{pe^{\theta} + (1-p)\}^n\end{aligned}$$

(3) (2) の $\varphi(\theta)$ を微分すると

$$\begin{aligned}\varphi'(\theta) &= n\{pe^{\theta} + (1-p)\}^{n-1} pe^{\theta} \\ \varphi''(\theta) &= n(n-1)\{pe^{\theta} + (1-p)\}^{n-2} p^2 e^{2\theta} + n\{pe^{\theta} + (1-p)\}^{n-1} pe^{\theta}\end{aligned}$$

これより，

$$E[X] = \varphi'(0) = np, \qquad E[X^2] = \varphi''(0) = n(n-1)p^2 + np$$

よって，

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

118 $Z=X+Y$ の確率密度関数を $f(z)$ とおくと

$$\begin{aligned}
f(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2{\sigma_1}^2}\right\}\exp\left\{-\frac{(z-x-m_2)^2}{2{\sigma_2}^2}\right\}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\underline{-\frac{(x-m_1)^2}{2{\sigma_1}^2}-\frac{(z-x-m_2)^2}{2{\sigma_2}^2}}\right\}\,dx
\end{aligned}$$

ここで，最後の式の指数関数の指数の部分 (波線部分) を $g(x)$ とすると

$$\begin{aligned}
g(x) &= -\left(\frac{1}{2{\sigma_1}^2}+\frac{1}{2{\sigma_2}^2}\right)x^2+\left(\frac{m_1}{{\sigma_1}^2}+\frac{(z-m_2)}{{\sigma_2}^2}\right)x-\left(\frac{{m_1}^2}{2{\sigma_1}^2}+\frac{(z-m_2)^2}{2{\sigma_2}^2}\right) \\
&= -\frac{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}x^2+\frac{m_1{\sigma_2}^2+(z-m_2){\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}x-\frac{{m_1}^2{\sigma_2}^2+(z-m_2)^2{\sigma_1}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2} \\
&= -\frac{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}\left(x^2-2\frac{m_1{\sigma_2}^2+(z-m_2){\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}x\right)-\frac{{m_1}^2{\sigma_2}^2+(z-m_2)^2{\sigma_1}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2} \\
&= -\frac{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}\left(x-\frac{m_1{\sigma_2}^2+(z-m_2){\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}\right)^2 \\
&\qquad \underline{+\frac{\left(m_1{\sigma_2}^2+(z-m_2){\sigma_1}^2\right)^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)}-\frac{{m_1}^2{\sigma_2}^2+(z-m_2)^2{\sigma_1}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}}
\end{aligned}$$

ここですぐ上の式の青色の波線部分を $h(z)$ とおくと

$$\begin{aligned}
h(z) &= \frac{\left(m_1{\sigma_2}^2+(z-m_2){\sigma_1}^2\right)^2-\left({m_1}^2{\sigma_2}^2+(z-m_2)^2{\sigma_1}^2\right)({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)} \\
&= \frac{2m_1(z-m_2){\sigma_1}^2{\sigma_2}^2-\left({m_1}^2+(z-m_2)^2\right){\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)} \\
&= -\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)}
\end{aligned}$$

となる．これより

$$g(x) = -\frac{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}\left(x-\frac{m_1{\sigma_2}^2+(z-m_2){\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}\right)^2-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)}$$

となる．一般に a を $a > 0$ を満たす実数，c を任意の実数とするとき，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-a(x-c)^2\}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdots ①$ が成り立つから

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}} \exp\left\{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}} \exp\left\{-\frac{\bigl(z-(m_1+m_2)\bigr)^2}{2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)}\right\} \end{aligned}$$

となり，Z は正規分布 $N(m_1+m_2,\, {\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)$ に従うことが示された． □

[注意] 定積分①は $t = \sqrt{a}(x-c)$ と置くことによって次のように得られる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-a(x-c)^2\}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

119 (1) x_1, x_2 を不等式 $x_1 < x_2$ を満たす任意の実数とすると常に $f(t) \geqq 0$ が成り立つから

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t)\,dt \leqq \int_{-\infty}^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x_2} f(t)\,dt = F(x_2)$$

(2) 確率密度関数の性質より

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$$

(3) $t = x$ が $f(t)$ の連続点であるならば，微積分の基本定理より，

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = f(x)$$

(4) X の確率密度関数を $f(x)$ とおくと，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

である．$Y = X^2$ の累積分布関数を $G(y)$ とおき，Y の確率密度関数を $g(y)$ とおく．

・$y > 0$ のとき，

$$\begin{aligned}G(y) &= P(Y \leqq y) = P(X^2 \leqq y) = P(-\sqrt{y} \leqq X \leqq \sqrt{y}) \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,dx \overset{*}{=} 2\int_0^{\sqrt{y}} f(x)\,dx \quad \leftarrow * : f(x) \text{ は偶関数だから}\end{aligned}$$

よって，合成関数の微分の公式より

$$\begin{aligned}g(y) &= G'(y) = 2f(\sqrt{y})\,\frac{d}{dy}\sqrt{y} \\ &= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\end{aligned}$$

・$y < 0$ のとき，$G(y) = 0$．よって，$g(y) = G'(y) = 0$

以上をまとめると

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}\exp\left(-\dfrac{y}{2}\right) & (y > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (y < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(5) $Z = X^2 + Y^2$ の確率密度関数を $h(z)$ とおく．X, Y は互いに独立だから，X^2, Y^2 も互いに独立である．X^2 と Y^2 の確率密度関数は (4) の $g(y)$ であるから，$\boxed{118}$ の問題文 3 行目の公式を用いる．

・$z > 0$ のとき，$x < 0$ または $x > z$ では $g(x)g(z-x) = 0$ だから

$$\begin{aligned}h(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(z-x)\,dx \\ &= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(z-x)}}\exp\left(-\frac{(z-x)}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{z}{2}\right)\underline{\int_0^z \frac{1}{\sqrt{x(z-x)}}\,dx}\end{aligned}$$

ここで最後の式の青色の波線部分の定積分は広義積分であり，その値は

$$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{x(z-x)}}\,dx = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{z}{2}\right)^2}}\,dx$$
$$= \left[\sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}\right)\right]_0^z$$
$$= \sin^{-1}1 - \sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

よって $z > 0$ のとき $h(z) = \dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{z}{2}\right)$.

・$z < 0$ のとき，常に $g(x)g(z-x) = 0$ であるから $h(z) = 0$.

以上をまとめると

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{z}{2}\right) & (z > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (z < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

[注意] 次のように (4) の結果を使わない解答の方が自然であるかもしれない.

[別解]　X, Y はともに標準正規分布にしたがい，その確率密度関数を $f(x)$ とおく．また，$Z = X^2 + Y^2$ の累積分布関数を $H(z)$ とおき，Z の確率密度関数を $h(z)$ とおく.

・$z > 0$ のとき，X, Y は互いに独立だから，(X, Y) の同時確率密度関数は $f(x)f(y)$ となること，および，$Z \leqq z \iff X^2 + Y^2 \leqq z$ であることより，

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \iint_{x^2+y^2 \leqq z} f(x)f(y)\,dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leqq z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\,dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leqq z} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\,dxdy \qquad \leftarrow e^a e^b = e^{a+b} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r\,drd\theta \qquad \text{←極座標に変数変換} \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^{\sqrt{z}} d\theta \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{z}{2}\right)
\end{aligned}
$$

これより，

$$h(z) = H'(z) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{z}{2}\right)$$

・$z < 0$ のとき，$H(z) = 0$．これより，$h(z) = H'(z) = 0$

以上をまとめると

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \exp\left(-\dfrac{z}{2}\right) & (z > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (z < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{120}}$ (1) X は二項分布 $B\left(n, \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから

$$E[X] = n \cdot \frac{1}{6} = \frac{n}{6}, \qquad V[X] = n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5n}{36}$$

(2) Y も二項分布 $B\left(n, \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから $E[Y] = \dfrac{n}{6}$ が成り立ち，

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY] - \frac{n^2}{36}$$

が導かれる．i, j を $i \geqq 0,\ j \geqq 0,\ i + j \leqq n$ を満たす自然数とする．このとき，
$X = i, Y = j$ となる確率 $P(X = i, Y = j)$ は

$$P(X=i, Y=j) = {}_n\mathrm{C}_i\ {}_{n-i}\mathrm{C}_j \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{4}{6}\right)^{n-i-j}$$
$$= \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{4}{6}\right)^{n-i-j}$$

で表される．よって XY の期待値は

$$E[XY] = \sum_{i \geqq 0,\, j \geqq 0,\, i+j \leqq n} i\, j\ P(X=i, Y=j)$$
$$= \sum_{i \geqq 0,\, j \geqq 0,\, i+j \leqq n} i\, j\ \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{4}{6}\right)^{n-i-j}$$
$$= \sum_{\substack{i \geqq 1,\, j \geqq 1 \\ i+j \leqq n}} \frac{n!}{(i-1)!\,(j-1)!\,(n-i-j)!} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{4}{6}\right)^{n-i-j}$$

ここで $i-1=k,\ j-1=l$ とおくと，$i \geqq 1,\ j \geqq 1,\ i+j \leqq n$ は $k \geqq 0,\ l \geqq 0,\ k+l \leqq n-2$ となるから

$$E[XY] = \sum_{\substack{k \geqq 0,\, l \geqq 0, \\ k+l \leqq n-2}} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{k!\,l!\,\{(n-2)-k-l\}!} \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} \left(\frac{1}{6}\right)^{l+1} \left(\frac{4}{6}\right)^{(n-2)-k-l}$$
$$= \frac{n(n-1)}{36} \sum_{\substack{k \geqq 0,\, l \geqq 0, \\ k+l \leqq n-2}} \frac{(n-2)!}{k!\,l!\,\{(n-2)-k-l\}!} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{l} \left(\frac{4}{6}\right)^{(n-2)-k-l}$$
$$\overset{*}{=} \frac{n(n-1)}{36} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}\right)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{36} \cdot 1$$

← 等号 $*$ については下記［注］の多項定理を用いた

となる．これより，

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \frac{n(n-1)}{36} - \frac{n^2}{36} = -\frac{n}{36}$$

が成り立つ．

(3) $V[X] = V[Y] = \dfrac{5n}{36}$ であるから

$$\rho[X, Y] = \frac{\mathrm{Cov}[X, Y]}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}} = \frac{-\dfrac{n}{36}}{\dfrac{5n}{36}} = -\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

[注]（多項定理） 二項定理に対して n を自然数とするとき，

$$(a+b+c)^n = \sum_{i \geqq 0,\, j \geqq 0, i+j \leqq n} \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!} a^i\, b^j\, c^{n-i-j}$$

が成り立つ．これを多項定理という．これは二項定理を使って次のように示すことができる．

$$\begin{aligned}(a+b+c)^n &= \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i\, a^i (b+c)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i\, a^i \left(\sum_{j=0}^{n-i} {}_{n-i}\mathrm{C}_j\, b^j c^{(n-i)-j} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!\,(n-i)!}\ \frac{(n-i)!}{j!\,(n-i-j)!}\ a^i\, b^j\, c^{n-i-j} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!}\ a^i\, b^j\, c^{n-i-j}\end{aligned}$$

添え字 i, j の範囲は $i \geqq 0,\ j \geqq 0,\ i+j \leqq n$ とまとめることができる．

これを用いて $E[XY] = \dfrac{n(n-1)}{36}$ となることを次のように証明することもできる．

[証明] $p = \dfrac{1}{6},\, q = \dfrac{1}{6},\, r = \dfrac{4}{6}$ とおき，$f(x, y) = (px + qy + r)^n \cdots ①$ とおく．このとき，多項定理より

$$f(x, y) = \sum_{i \geqq 0,\, j \geqq 0,\, i+j \leqq n} \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!} (px)^i\, (qy)^j\, r^{n-i-j}$$

が成り立つ．これを x と y で偏微分すると

$$f_{xy}(x, y) = \sum_{i \geqq 0,\, j \geqq 0,\, i+j \leqq n} i\, j\, \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!} p(px)^{i-1}\, q(qy)^{j-1}\, r^{n-i-j}$$

となるから，この式に $x = y = 1$ を代入すると

$$f_{xy}(1, 1) = \sum_{i \geqq 0,\, j \geqq 0,\, i+j \leqq n} i\, j\, \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!} p^i\, q^j\, r^{n-i-j} = E[XY]$$

が成り立つ．ところで①より

$$f_{xy}(x, y) = n(n-1)pq(px + qy + r)^{n-2}$$

であり，これに $x = y = 1$ を代入すると $p + q + r = 1$ であるから

$$E[XY] = f_{xy}(1, 1) = n(n-1)pq = \frac{n(n-1)}{36}$$

が導かれる．