3 章 C 発展問題詳解

$\boxed{48}$ (1) $\mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - f(0)s - f'(0)$ と像関数の移動法則より

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\varphi(t)] &= \mathscr{L}\left[e^{\lambda t} f''(t)\right] \\ &= (s-\lambda)^2 F(s-\lambda) - f(0)(s-\lambda) - f'(0)\end{aligned}$$

(2) $\mathscr{L}[f(at)] = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$ $(a > 0)$ と原関数の移動法則より

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\psi(t)] &= \mathscr{L}\left[f(at-b)U\left(t-\frac{b}{a}\right)\right] \\ &= \mathscr{L}\left[f\left(a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right)U\left(t-\frac{b}{a}\right)\right] \\ &= e^{-\frac{b}{a}s}\cdot\left(\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\right) \\ &= \frac{e^{-\frac{b}{a}s}}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{49}$ (1)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)] &= \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty \frac{\sin^2 tx}{x^2}\,dx\right\}e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty \frac{1-\cos 2tx}{2x^2}\,dx\right\}e^{-st}\,dt \qquad \longleftarrow \text{半角の公式}\ \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left\{\int_0^\infty (1-\cos 2tx)e^{-st}\,dt\right\}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left(\mathscr{L}[1] - \mathscr{L}[\cos 2xt]\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4x^2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left(\frac{4x^2}{s(s^2+4x^2)}\right)dx \\ &= \frac{2}{s}\int_0^\infty \frac{1}{s^2+4x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2s}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\frac{s^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2s}\left[\frac{2}{s}\tan^{-1}\frac{2x}{s}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2s^2} \qquad \therefore\ \mathscr{L}[f(t)] = \frac{\pi}{2s^2}\end{aligned}$$

(2)　(1) の結果，$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{\pi}{2s^2}\right]=\dfrac{\pi}{2}t$ より

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 tx}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}t \quad \cdots\cdots \quad ①$$

① に $t=a$ を代入して

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}a$$

$\boxed{50}$

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt=\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}e^{-st}\,dt \quad \cdots\cdots \quad ①$$

より，まず $\mathscr{L}\left[\dfrac{\sin t}{t}\right]$ を求める．

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}e^{-st}\,dt=\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_s^\infty \frac{d\sigma}{\sigma^2+1}$$
$$=[\tan^{-1}\sigma]_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s$$

① より

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt=\lim_{s\to 0}\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\lim_{s\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

$\boxed{51}$　$Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$ とおき，微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2Y(s)-3s+2-2(sY(s)-3)+Y(s)=\frac{3}{(s-1)^2}+\frac{1}{s-1}$$

$$(s^2-2s+1)Y(s)=\frac{3}{(s-1)^2}+\frac{1}{s-1}+3s-8$$
$$Y(s)=\frac{3}{(s-1)^4}+\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{3s-8}{(s-1)^2}$$
$$=\frac{3}{s-1}+\frac{-5}{(s-1)^2}+\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{3}{(s-1)^4}$$

$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]$ より

$$y(t)=3e^t-5te^t+\frac{1}{2}t^2e^t+\frac{1}{2}t^3e^t$$

$\boxed{52}$ $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$，$y(0)=k$ とおく．このとき，微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$sY(s)-k+aY(s)=\frac{1}{s+b}+\frac{s}{s^2+c^2}$$

$$\begin{aligned}(s+a)Y(s)&=\frac{1}{s+b}+\frac{s}{s^2+c^2}+k\\ Y(s)&=\frac{1}{(s+a)(s+b)}+\frac{s}{(s+a)(s^2+c^2)}+\frac{k}{s+a}\\ &=\frac{A}{s+a}+\frac{\frac{1}{a-b}}{s+b}+\frac{\alpha s+\beta}{s^2+c^2}\quad\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

ただし, A は任意定数である．ここで，網掛けの部分に注目して $(*)$ の α, β を定める．

$$\frac{s}{(s+a)(s^2+c^2)}=\frac{\alpha s+\beta}{s^2+c^2}+\frac{\frac{-a}{a^2+c^2}}{s+a}\quad\cdots\cdots\quad①$$

① の両辺に s^2+c^2 をかけ，両辺に $s=ci$ を代入することで α, β が定められる．

$$\left.\frac{s}{s+a}\right|_{s=ci}=(\alpha s+\beta)|_{s=ci}+\left.\left(\frac{\frac{-a}{a^2+c^2}}{s+a}\times(s^2+c^2)\right)\right|_{s=ci}=(\alpha s+\beta)|_{s=ci}$$

$\left.\dfrac{s}{s+a}\right|_{s=ci}=(\alpha s+\beta)|_{s=ci}$ より

$$\beta+\alpha ci=\frac{ci}{a+ci}=\frac{(a-ci)ci}{a^2+c^2}=\frac{c^2}{a^2+c^2}+\frac{ac}{a^2+c^2}i$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{a}{a^2+c^2},\quad \beta=\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

これより

$$Y(s)=\frac{A}{s+a}+\frac{\frac{1}{a-b}}{s+b}+\frac{\frac{a}{a^2+c^2}s+\frac{c^2}{a^2+c^2}}{s^2+c^2}$$

$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]$ より

$$y(t)=Ae^{-at}+\frac{1}{a-b}e^{-bt}+\frac{a}{a^2+c^2}\cos ct+\frac{c}{a^2+c^2}\sin ct\quad(A\text{ は任意定数})$$

$\boxed{53}$ (1) $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$ とおき, 微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$\begin{aligned}s^2X(s)+\omega^2X(s)&=\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2}\\ (s^2+\omega^2)X(s)&=\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2}\quad\cdots\cdots\quad(*)\end{aligned}$$

$$X(s)=\frac{\Omega}{(s^2+\omega^2)(s^2+\Omega^2)}=\frac{\alpha_1 s+\beta_1}{s^2+\omega^2}+\frac{\alpha_2 s+\beta_2}{s^2+\Omega^2}\quad(\Omega\neq\omega)\quad\cdots\cdots\quad①$$

① の α_1, β_1 を求める．

① の両辺に $s^2+\omega^2$ をかけ，両辺に $s=\omega i$ を代入することで α_1, β_1 が定められる．

$$\left.\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2}\right|_{s=\omega i} = (\alpha_1 s+\beta_1)|_{s=\omega i} + \left.\left(\frac{\alpha_2 s+\beta_2}{s^2+\Omega^2}\times(s^2+\omega^2)\right)\right|_{s=\omega i} = (\alpha_1 s+\beta_1)|_{s=\omega i}$$

$\left.\dfrac{\Omega}{s^2+\Omega^2}\right|_{s=\omega i} = (\alpha_1 s+\beta_1)|_{s=\omega i}$ より

$$\beta_1+\alpha_1\omega i = \frac{\Omega}{\Omega^2-\omega^2}$$

より，$\alpha_1=0$，$\beta_1=\dfrac{\Omega}{\Omega^2-\omega^2}$ である．同様に，① から α_2, β_2 を求める．

① の両辺に $s^2+\Omega^2$ をかけ，両辺に $s=\Omega i$ を代入することで α_2, β_2 が定められる．

$$\left.\frac{\Omega}{s^2+\omega^2}\right|_{s=\Omega i} = \left.\left(\frac{\alpha_1 s+\beta_1}{s^2+\omega^2}\times(s^2+\Omega^2)\right)\right|_{s=\Omega i} + (\alpha_2 s+\beta_2)|_{s=\Omega i} = (\alpha_2 s+\beta_2)|_{s=\Omega i}$$

$\left.\dfrac{\Omega}{s^2+\omega^2}\right|_{s=\Omega i} = (\alpha_2 s+\beta_2)|_{s=\Omega i}$ より

$$\beta_2+\alpha_2\Omega i = \frac{\Omega}{\omega^2-\Omega^2}$$

より，$\alpha_2=0$，$\beta_2=-\dfrac{\Omega}{\Omega^2-\omega^2}$ である．

$$\begin{aligned}\therefore\quad X(s) &= \frac{\Omega}{(s^2+\omega^2)(s^2+\Omega^2)} = \frac{\frac{\Omega}{\Omega^2-\omega^2}}{s^2+\omega^2} + \frac{-\frac{\Omega}{\Omega^2-\omega^2}}{s^2+\Omega^2} \\ &= \frac{\Omega}{\omega(\Omega^2-\omega^2)}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2} - \frac{1}{\Omega^2-\omega^2}\cdot\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2} \quad (\Omega\neq\omega)\end{aligned}$$

$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]$ より

$$x(t) = \frac{\Omega}{\omega(\Omega^2-\omega^2)}\sin\omega t - \frac{1}{\Omega^2-\omega^2}\sin\Omega t \quad (\Omega\neq\omega)$$

(2) (1) の $(*)$ において，$\Omega=\omega$ とおくと

$$X(s) = \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$

畳込みのラプラス変換の性質から

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\left(\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau\sin\omega(t-\tau)\,d\tau \qquad \longleftarrow \quad f(t)*g(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)G(s)]\end{aligned}$$

ここで，積和の公式 $\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$ より

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{1}{2\omega}\int_0^t \{\cos\omega t - \cos(2\omega\tau-\omega t)\}\ d\tau \\
&= \frac{1}{2\omega}\int_0^t \{\cos(2\omega\tau-\omega t)-\cos\omega t\}\ d\tau \\
&= \frac{1}{2\omega}\left[\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega\tau-\omega t)-\tau\cos\omega t\right]_0^t \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{1}{2\omega}\sin\omega t - t\cos\omega t + \frac{1}{2\omega}\sin\omega t\right) \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t - t\cos\omega t\right) \\
&= \frac{1}{2\omega^2}\sin\omega t - \frac{1}{2\omega}t\cos\omega t
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad x(t) = \frac{1}{2\omega^2}\sin\omega t - \frac{1}{2\omega}t\cos\omega t$$

$\boxed{54}$ $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$ とおき, 微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$\begin{aligned}
s^2X(s)+2\varepsilon sX(s)+\omega^2X(s) &= F(s) \\
(s^2+2\varepsilon s+\omega^2)X(s) &= F(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{F(s)}{s^2+2\varepsilon s+\omega^2} \\
&= \frac{F(s)}{(s+\varepsilon)^2+\omega^2-\varepsilon^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}}\frac{\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}}{(s+\varepsilon)^2+\omega^2-\varepsilon^2}\cdot F(s) \qquad (\because\ \omega^2-\varepsilon^2>0) \\
&= \mathscr{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}}\left(e^{-\varepsilon t}\sin\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}t\right)*f(t)\right]
\end{aligned}$$

ここで，$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]$ より

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}}\left(e^{-\varepsilon t}\sin\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}\,t\right)*f(t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}}\int_0^t e^{-\varepsilon\tau}\sin\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}\ \tau\ f(t-\tau)\,d\tau
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}}\int_0^t e^{-\varepsilon\tau}\sin\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}\ \tau\ f(t-\tau)\,d\tau$$

$\boxed{55}$

$$f(t) = 1 - \int_0^t f(\tau)(t-\tau)\,d\tau = 1 - f(t) * t \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

であるので，$F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ とおき，$(*)$ をラプラス変換すると

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s} - F(s)\frac{1}{s^2} \\ \frac{s^2+1}{s^2}F(s) &= \frac{1}{s} \\ F(s) &= \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ より $f(t) = \cos t$

$\boxed{56}$　与えられた関数方程式は畳込みを用いて次のように表せる．

$$f'(t) + 2f(t) - 16f(t) * \cos 4t + 2\sqrt{2}\sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad f(0) = 1$$

ここで，$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ より

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) &= 2\sqrt{2}\left(\sin 4t\cos\frac{\pi}{4} + \cos 4t\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\sin 4t\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 4t\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2\sin 4t + 2\cos 4t \end{aligned}$$

ゆえに

$$f'(t) + 2f(t) - 16f(t) * \cos 4t + 2\sin 4t + 2\cos 4t = 0, \quad f(0) = 1 \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

ここで，$F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ とおき, $(*)$ をラプラス変換すると

$$\begin{aligned} sF(s) - 1 + 2F(s) - \frac{16s}{s^2+16}F(s) &= -2\mathscr{L}[\sin 4t + \cos 4t] \\ \left(s + 2 - \frac{16s}{s^2+16}\right)F(s) &= \frac{-2s-8}{s^2+16} + 1 \\ \frac{s^3+2s^2+32}{s^2+16}F(s) &= \frac{s^2-2s+8}{s^2+16} \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{s^2+16}{(s+4)(s^2-2s+8)} \cdot \frac{s^2-2s+8}{s^2+16} \quad \longleftarrow \quad \text{因数定理より，} s^3+2s^2+32 = (s+4)(s^2-2s+8)$$

$$F(s) = \frac{1}{s+4}$$

$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ より $f(t) = e^{-4t}$

$\boxed{57}$ $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$ とおき, 微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$
\begin{aligned}
sY(s) + Y(s) &= \frac{\displaystyle\int_0^{2T} f(t)e^{-st}\,dt}{1-e^{-2Ts}} \qquad \longleftarrow \text{ 例題 3.2 参照} \\
&= \frac{\mathscr{L}[U(t-T) - U(t-2T)]}{1-e^{-2Ts}} \\
&= \frac{1}{1-e^{-2Ts}}\left(\frac{e^{-Ts}}{s} - \frac{e^{-2Ts}}{s}\right) \\
&= \frac{e^{-Ts}}{s}\frac{1-e^{-Ts}}{1-e^{-2Ts}} = \frac{e^{-Ts}}{s}\frac{1-e^{-Ts}}{(1-e^{-Ts})(1+e^{-Ts})} \\
(s+1)Y(s) &= \frac{e^{-Ts}}{s(1+e^{-Ts})} \\
Y(s) &= \frac{e^{-Ts}}{s(s+1)(1+e^{-Ts})} \\
&= \frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{e^{-Ts}}{1+e^{-Ts}} \\
&= \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)\frac{e^{-Ts}}{1+e^{-Ts}}
\end{aligned}
$$

ここで，$0 < e^{-Ts} < 1$ $(s > 0)$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ $(|r| < 1)$ から

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)(e^{-Ts} - e^{-2Ts} + e^{-3Ts} - \cdots) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)(-1)^{n-1}e^{-nTs}
\end{aligned}
$$

$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)]$ および

$$
\mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)(-1)^{n-1}e^{-nTs}\right] = (-1)^{n-1}\left(U(t-nT) - e^{-(t-nT)}U(t-nT)\right)
$$

であることから

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(U(t-nT) - e^{-(t-nT)}U(t-nT)\right) \\
&= U(t-T) - e^{-(t-T)}U(t-T) - (U(t-2T) - e^{-(t-2T)}U(t-2T)) \\
&\quad + (U(t-3T) - e^{-(t-3T)}U(t-3T)) - (U(t-4T) - e^{-(t-4T)}U(t-4T)) + \cdots \\
&\quad \cdots + (-1)^{2n-1}\left(U(t-2nT) - e^{-(t-2nT)}U(t-2nT)\right) \\
&\quad + (-1)^{2n}\left(U(t-(2n+1)T) - e^{-(t-(2n+1)T)}U(t-(2n+1)T)\right) + \cdots
\end{aligned}
$$

これより

(1) $0<t \leqq T$ のとき，$y(t)=0$
(2) $T<t \leqq 2T$ のとき，$y(t)=1-e^{-(t-T)}$
(3) $2T<t \leqq 3T$ のとき，$y(t)=-e^{-(t-T)}+e^{-(t-2T)}$
(4) $3T<t \leqq 4T$ のとき，$y(t)=1-e^{-(t-T)}+e^{-(t-2T)}-e^{-(t-3T)}$
(5) $4T<t \leqq 5T$ のとき，$y(t)=-e^{-(t-T)}+e^{-(t-2T)}-e^{-(t-3T)}+e^{-(t-4T)}$
$\vdots$

となる．特に，$2nT<t \leqq (2n+1)T$ のとき

$$\begin{aligned}
y(t) &= -e^{-(t-T)}+e^{-(t-2T)}-e^{-(t-3T)}+e^{-(t-4T)}-\cdots+(-1)^{2n}e^{-(t-2nT)} \\
&= -e^{-(t-T)}(1-e^{T}+e^{2T}-\cdots+(-1)^{2n-1}e^{(2n-1)T}) \\
&= -e^{-(t-T)}\frac{1-e^{2nT}}{1+e^{T}} \\
&= -e^{-t+T}\frac{e^{2nT}(e^{-2nT}-1)}{e^{T}(e^{-T}+1)} \\
&= e^{-t}e^{2nT}\frac{1-e^{-2nT}}{1+e^{-T}} \\
&= \frac{1-e^{-2nT}}{1+e^{-T}}e^{-(t-2nT)}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad y(t)=\frac{1-e^{-2nT}}{1+e^{-T}}e^{-(t-2nT)} \quad (2nT<t \leqq (2n+1)T)$$

$\boxed{58}$ （例題 3.4 参照）$u(x,t)$ を t に関してラプラス変換する，すなわち

$$U(x,s)=\mathscr{L}[u(x,t)]=\int_0^\infty u(x,t)e^{-st}\,dt$$

とおく．このとき，$u(x,t)$ は有界なのである正の定数 M が存在して，$u(x,t) \leqq M$ が成り立つ（例題 3.4 参照）．これより，$u(x,t) \leqq M = Me^{0\cdot t}$ であるので $U(x,s)$ は $s>0$ の範囲で存在する．偏微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$sU(x,s)-u(x,0)=\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)$$

より

$$U''(x,s)-\frac{s}{\alpha^2}U(x,s)=-\frac{1}{\alpha^2}\sin\beta x \quad \cdots\cdots \quad ①$$

ただし，上記の $'$ は $\dfrac{\partial}{\partial x}$ の意味であり，① は x に関する 2 階線形微分方程式と考えることができる．

ここで，① の一つの解は

$$\varphi(x,s)=C_1(s)\sin\beta x+C_2(s)\cos\beta x \quad \cdots\cdots \quad ②$$

と類推できるので ② を ① に代入してみると

$$\begin{aligned}&-\beta^2C_1(s)\sin\beta x-\beta^2C_2(s)\cos\beta x-\frac{s}{\alpha^2}(C_1(s)\sin\beta x+C_2(s)\cos\beta x)\\&=C_1(s)\left(-\beta^2-\frac{s}{\alpha^2}\right)\sin\beta x+C_2(s)\left(-\beta^2-\frac{s}{\alpha^2}\right)\cos\beta x\\&=-\frac{1}{\alpha^2}\sin\beta x\end{aligned}$$

上式が恒等式として成り立つためには

$$C_1(s)=-\frac{1}{\alpha^2}\frac{-\alpha^2}{s+\alpha^2\beta^2}=\frac{1}{s+(\alpha\beta)^2},\quad C_2(s)=0$$

$$\therefore\quad \varphi(x,s)=\frac{1}{s+(\alpha\beta)^2}\sin\beta x \quad \cdots\cdots \quad ③$$

ここで，① の特性方程式は $\lambda^2-\dfrac{s}{\alpha^2}=0$ であり，その解は

$$\lambda=\pm\frac{\sqrt{s}}{\alpha}\quad (\because\quad s>0)$$

となる．この結果，① の一般解は

$$U(x,s)=A(s)e^{\frac{\sqrt{s}}{\alpha}x}+B(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{\alpha}x}+\frac{1}{s+(\alpha\beta)^2}\sin\beta x$$

条件より $U(x,s)$ は定義域で有界であることから $A(s)=B(s)=0$

$$\therefore\quad U(x,s)=\frac{1}{s+(\alpha\beta)^2}\sin\beta x$$

$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}[U(x,s)]$ であるので，この偏微分方程式の解は

$$u(x,t)=e^{-\alpha^2\beta^2t}\sin\beta x$$

$\boxed{59}$ （例題 3.4 参照）$u(x,t)$ を t に関してラプラス変換する．すなわち

$$U(x,s)=\mathscr{L}[u(x,t)]=\int_0^\infty u(x,t)e^{-st}\,dt$$

とおき，偏微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2U(x,s)-u(x,0)s-u'(x,0)=\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)+\frac{\sin\frac{\pi x}{l}}{s}$$

より

$$U''(x,s)-\frac{s^2}{\alpha^2}U(x,s)=-\frac{\sin\frac{\pi x}{l}}{\alpha^2 s}\quad \cdots\cdots \quad ①$$

ただし，上記の $'$ は $\dfrac{\partial}{\partial x}$ の意味である．このとき，① は x に関する 2 階線形微分方程式である．ここで，① の一つの解は

$$\varphi(x,s) = C_1(s)\sin\frac{\pi x}{l} + C_2(s)\cos\frac{\pi x}{l} \quad \cdots\cdots \quad ②$$

と類推できる．② を ① に代入してみると

$$\begin{aligned}
&-\frac{\pi^2}{l^2}\left(C_1(s)\sin\frac{\pi x}{l} + C_2(s)\cos\frac{\pi x}{l}\right) - \frac{s^2}{\alpha^2}\left(C_1(s)\sin\frac{\pi x}{l} + C_2(s)\cos\frac{\pi x}{l}\right)\\
&= -\left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{\alpha^2}\right)C_1(s)\sin\frac{\pi x}{l} - \left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{\alpha^2}\right)C_2(s)\cos\frac{\pi x}{l}\\
&= -\frac{\sin\frac{\pi x}{l}}{\alpha^2 s}
\end{aligned}$$

上式が恒等式として成り立つためには

$$C_1(s) = \frac{1}{\alpha^2 s}\frac{1}{\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{\alpha^2}} = \frac{\alpha^2 l^2}{\alpha^2 s(\alpha^2\pi^2 + l^2 s^2)} = \frac{1}{s\left(s^2 + \frac{\pi^2\alpha^2}{l^2}\right)}, \quad C_2(s) = 0$$

$$\therefore \quad \varphi(x,s) = \frac{1}{s\left(s^2 + \frac{\pi^2\alpha^2}{l^2}\right)}\sin\frac{\pi x}{l} \quad \cdots\cdots \quad ③$$

ここで，① の特性方程式は $\lambda^2 - \dfrac{s^2}{\alpha^2} = 0$ であり，その解は

$$\lambda = \pm\frac{s}{\alpha}$$

となる．この結果と ③ より，① の一般解は

$$U(x,s) = A(s)e^{\frac{s}{\alpha}x} + B(s)e^{-\frac{s}{\alpha}x} + \frac{1}{s\left(s^2 + \frac{\pi^2\alpha^2}{l^2}\right)}\sin\frac{\pi x}{l}$$

ここで，$u(0,t) = u(l,t) = 0$ より $U(0,s) = U(l,s) = 0$ となるので

$$\begin{aligned}
U(0,s) &= A(s) + B(s) = 0\\
U(l,s) &= A(s)e^{\frac{s}{\alpha}l} + B(s)e^{-\frac{s}{\alpha}l} = 0
\end{aligned}$$

これより

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{s}{\alpha}l} & e^{-\frac{s}{\alpha}l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A(s) \\ B(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \quad ④$$

$l > 0$ より ④ の連立方程式を解くと $A(s) = B(s) = 0$ となるので

$$U(x,s) = \frac{1}{s\left(s^2 + \frac{\pi^2\alpha^2}{l^2}\right)}\sin\frac{\pi x}{l}$$

$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}[U(x,s)]$ より

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\left(s^2+\frac{\pi^2\alpha^2}{l^2}\right)}\sin\frac{\pi x}{l}\right]$$
$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\left(s^2+\frac{\pi^2\alpha^2}{l^2}\right)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$$
$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\frac{l^2}{\pi^2\alpha^2}}{s}+\frac{As+B}{s^2+\frac{\pi^2\alpha^2}{l^2}}\right]\sin\frac{\pi x}{l}\quad\cdots\quad ⑤$$

⑤ において A, B を求める．

$$\frac{1}{s\left(s^2+\frac{\pi^2\alpha^2}{l^2}\right)}=\frac{\frac{l^2}{\pi^2\alpha^2}}{s}+\frac{As+B}{s^2+\frac{\pi^2\alpha^2}{l^2}}\quad\cdots\cdots\quad ⑥$$

⑥ の両辺に $s^2+\frac{\pi^2\alpha^2}{l^2}$ をかけ，両辺に $s=\dfrac{\pi\alpha}{l}i$ を代入することで A, B が定められる．

$$\left.\frac{1}{s}\right|_{s=\frac{\pi\alpha}{l}i}=\left.\left(\frac{\frac{l^2}{\pi^2\alpha^2}}{s}\times\left(s^2+\frac{\pi^2\alpha^2}{l^2}\right)\right)\right|_{s=\frac{\pi\alpha}{l}i}+\left.(As+B)\right|_{s=\frac{\pi\alpha}{l}i}=\left.(As+B)\right|_{s=\frac{\pi\alpha}{l}i}$$

$\left.\dfrac{1}{s}\right|_{s=\frac{\pi\alpha}{l}i}=\left.(As+B)\right|_{s=\frac{\pi\alpha}{l}i}$ より

$$A\frac{\pi\alpha}{l}i+B=\frac{1}{\frac{\pi\alpha}{l}i}=-\frac{l}{\pi\alpha}i$$

$$\therefore\quad A=-\frac{l^2}{\pi^2\alpha^2},\ B=0$$

これより

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\frac{l^2}{\pi^2\alpha^2}}{s}+\frac{-\frac{l^2}{\pi^2\alpha^2}s}{s^2+\frac{\pi^2\alpha^2}{l^2}}\right]\sin\frac{\pi x}{l}=\left(\frac{l^2}{\pi^2\alpha^2}-\frac{l^2}{\pi^2\alpha^2}\cos\frac{\pi\alpha}{l}t\right)\sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\therefore\quad u(x,t)=\frac{l^2}{\pi^2\alpha^2}\left(1-\cos\frac{\pi\alpha}{l}t\right)\sin\frac{\pi x}{l}$$