$\boxed{62}$ (秋田大学)

(1) 勾配ベクトル $\nabla f = \left(\dfrac{2x}{x^2+2y^2},\ \dfrac{4y}{x^2+2y^2},\ 0 \right) = \dfrac{2x}{x^2+2y^2}\boldsymbol{i} + \dfrac{4y}{x^2+2y^2}\boldsymbol{j}$ より

点 $(2,1)$ における勾配ベクトルは $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{i}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{j}$

(2) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x,y) = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + f(x,y)\boldsymbol{k}$ とおく.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{2x}{x^2+2y^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{4y}{x^2+2y^2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{2x}{x^2+2y^2},\ -\frac{4y}{x^2+2y^2},\ 1 \right)$$ は,

曲面 $f(x,y) = \log(x^2+2y^2) \cdots♠$ の法線ベクトルの 1 つである.

点 $(2,1)$ において $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}} = \left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3},\ 1 \right)$

また，点 $(2,1)$ における z 座標は $\log 6$ …①

よって，接点 $(2,\ 1,\ \log 6)$ における♠の接平面の方程式は

$$-\frac{2}{3}(x-2) - \frac{2}{3}(y-1) - (z-\log 6) = 0$$

$$\therefore\ 2x+2y-3z-6+3\log 6 = 0$$

したがって，点 $(3,2)$ における z 座標は $z = \dfrac{4}{3} + \log 6$ …②

$\therefore$ 差は，$|①-②| = \dfrac{4}{3}$

$\boxed{63}$ (静岡大学)

(1) $\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ 1),\ \overrightarrow{AC}=(-3,\ -1,\ 2)$ より

平面 π の法線ベクトルは $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(5,\ -5,\ 5)$

平面 π は点 $A(1,\ 1,\ 1)$ を含むから，その方程式は $5(x-1)-5(y-1)+5(z-1)=0$

$\therefore\ x-y+z-1=0$

(2) (1)より，垂直な直線の方向ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ である．

点 D を通るから， 求める方程式は，$x=\dfrac{y-2}{-1}=z-5$ $\therefore\ x=-y+2=z-5$

(3) 点と平面の距離の公式より $\dfrac{|0-2+5-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(4) $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ によって作られる平行四辺形の面積は $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=5\sqrt{3}$ である．

したがって，三角形の面積は $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

(5) $\overrightarrow{AD}=(-1,\ 1,\ 4)$ である．

求める四面体 ABCD の体積は $\dfrac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right)\right|=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$

$\boxed{\text{補足}}$ 四面体の体積の求め方は，例題 2.1 を参照ください．

$\boxed{64}$ (豊橋技術大学)

(1) 条件より，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3+4p+3q=0$　$\therefore$ $4p+3q=-3$

(2) 条件より，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=6+3p+q=0$　$\therefore$ $3p+q=-6$

(3) (1)，(2)の連立方程式を解くことにより，　$p=-3,\ q=3$

(4) $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{3^2+(-3)^2+3^2}=3\sqrt{3}$

(5) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-5\ \boldsymbol{i}+5\ \boldsymbol{j}-5\ \boldsymbol{k}$

(6) $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=5\sqrt{3}$

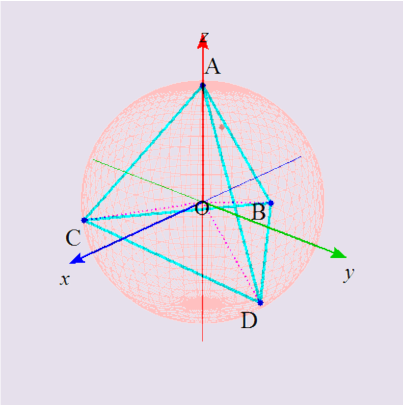
(7) $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-45}{3\sqrt{3}\cdot5\sqrt{3}}=-1$　$\therefore\theta=\pi\left(180^\circ\right)$

(8) $V=|\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|=45$

補足　平行六面体の体積の求め方は，例題 2.1 を参照ください．

$\boxed{65}$ (東北大学)

(1) 正四面体であるから，$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$ である．



$\overrightarrow{AB} = \left(-\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta - 1\right)$,

$\overrightarrow{CD} = \left(0,\ 2\sin\theta\sin 60^\circ,\ 0\right)$ より

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CD}\right|^2 \Leftrightarrow 2 - 2\cos\theta = 3\sin^2\theta \cdots$①

$\Leftrightarrow 3\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow (3\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$

$0 < \theta < 180^\circ$ より $\cos\theta = -\frac{1}{3}$, また $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{3},\ \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(2) (1)より 頂点B$\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$ であるから，接平面の方程式は

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(x + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(z + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\therefore\ 2\sqrt{2}x + z + 3 = 0$$

(3) (1)の① 及び$\cos\theta = -\frac{1}{3}$ より，$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2 - 2\cos\theta} = \sqrt{2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

したがって，1 辺の長さは $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(4) $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\ 0, -\frac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3},\ -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

求める四面体ABCDの体積は $\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{8\sqrt{3}}{27}$

補足 四面体の体積の求め方は，例題 2.1 を参照ください．

$\boxed{66}$（北海道大学）

(1) $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\sin t\ \boldsymbol{i} + \cos t\ \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$　より

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt$$

$$= \int_C \left(\cos t\ \boldsymbol{i} + 2\sin t\ \boldsymbol{j} + 2t\ \boldsymbol{k}\right)\cdot\left(-\sin t\ \boldsymbol{i} + \cos t\ \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\right)dt$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\cos t\sin t + 4t\right)dt = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + 4t\right)dt$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\cos 2t + 2t^2\right]_0^{\pi} = 2\pi^2$$

(2) $f(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{\sqrt{r^2+1}}$　（$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，　$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ）より

$$\nabla f = -\left\{f(\boldsymbol{r})\right\}^3\left(x\ \boldsymbol{i} + y\ \boldsymbol{j} + z\ \boldsymbol{k}\right)$$

球面 S の方程式は　$x^2+y^2+z^2=4$　である．そのベクトル方程式を　$\boldsymbol{r}_S$　とすると，

$\boldsymbol{r}_S = x\ \boldsymbol{i} + y\ \boldsymbol{j} \pm \sqrt{4-x^2-y^2}\ \boldsymbol{k}$　である．

$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_S}{\partial x}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_S}{\partial y} = \left(\dfrac{x}{z},\ \dfrac{y}{z},\ 1\right)$，　$\dfrac{\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_S}{\partial x}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_S}{\partial y}}{\left|\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_S}{\partial x}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_S}{\partial y}\right|} = \left(\dfrac{x}{2},\ \dfrac{y}{2},\ \dfrac{z}{2}\right)$　より　$\boldsymbol{n} = \left(\dfrac{x_{\boldsymbol{p}}}{2},\ \dfrac{y_{\boldsymbol{p}}}{2},\ \dfrac{z_{\boldsymbol{p}}}{2}\right)$

また　$f(\boldsymbol{p}) = f\left(x_p\boldsymbol{i} + y_p\boldsymbol{j} + z_p\boldsymbol{k}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，　${x_{\boldsymbol{p}}}^2 + {y_{\boldsymbol{p}}}^2 + {z_{\boldsymbol{p}}}^2 = 4$　より

$$\nabla f\cdot\boldsymbol{n} = -\frac{\left\{f(\boldsymbol{p})\right\}^3}{2}\left({x_{\boldsymbol{p}}}^2 + {y_{\boldsymbol{p}}}^2 + {z_{\boldsymbol{p}}}^2\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$$