第 1 章　章末問題の解答

問1.1：数の性質

(1)　以下は解答例です。自分の言葉で理解をすることが大事です。

稠密性：数の集合の性質で、数直線上のどんなに小さい区間をとっても、その中に無数の数（要素）が存在するという性質

連続性（完備性）：数の集合の性質で、数直線上に隙間なく埋まっているという性質

(2)　稠密性のあるもの：有理数、無理数、実数。　　連続性のあるもの：実数のみ

解説：有理数や無理数は稠密性を満たしますが、隙間があります。隙間がなく、連続性を満たすのは実数だけです。

問1.2：収束と極限

(1)　数列がある値 α に収束するとは、α のどんな小さい近傍をとっても、数列の値がいずれその近傍から外に出なくなることを意味する。

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n = 45$ の意味：数列 a_n は 45 に収束する。

$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ の意味：数列 b_n はプラス無限大に発散する。

問 1.3：計算問題：数列の極限

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}+0 = \frac{1}{3}$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$

解説：n が際限なく大きくなるとき、数列の値も際限なく大きくなります。どんなに大きな数を考えても n が十分に大きくなれば、その値を超えてしまうという事実を確認しましょう。

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}\right\} = 0$

解説：(3)との違いは符号がプラスとマイナスの値を交互に取ることですが、やはり限りなく0に近づいていきます。

(5) $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)\frac{3n}{7n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{7n-1} = 3\times\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{7n-1} = 3\times\frac{3}{7} = \frac{9}{7}$

解説：最後の極限計算は次のように分母と分子を n で割ることで極限を調べることができます。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{7n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{7-(1/n)} = \frac{3}{7-0} = \frac{3}{7}$$

(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{(0.9^n+3)^2}{(0.5^n+2)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(0.9^n+3)\times(0.9^n+3)}{(0.5^n+2)\times(0.5^n+2)} = \frac{(\lim_{n\to\infty}0.9^n+3)\times(\lim_{n\to\infty}0.9^n+3)}{(\lim_{n\to\infty}0.5^n+2)\times(\lim_{n\to\infty}0.5^n+2)}$

$$= \frac{(0+3)\times(0+3)}{(0+2)\times(0+2)} = \frac{9}{4}$$

(7) $\lim_{n\to\infty} \frac{(3+0.5^n)(3-0.5^n)}{\sqrt{n}+2} = \frac{(3+\lim_{n\to\infty} 0.5^n)(3-\lim_{n\to\infty} 0.5^n)}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}+2} = \frac{(3+0)(3-0)}{\infty+2} = 0$

解説：分子の値は 9 に近づき、分母がプラスの値で際限なく大きな値を取るようになるので、分数の値は 0 に限りなく近づきます。

(8) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0+0=0$

(9) $(-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+2} = (-1)^n \times \frac{\sqrt{n}+2-1}{\sqrt{n}+2} = (-1)^n \times \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}+2}\right)$

ここで後半のカッコの中は 1 に収束する。一方、前半部分は 1 と－1 を交互に取るので、いずれ数列の値は 1（に近い値）と–1（に近い値）を交互にとるようになる。つまり、この数列は振動する。

(10) あらかじめ書き換えておくと、

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})((\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

よって、

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

(11) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1}{3n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0-0}{3+0+0} = \frac{1}{3}$

問 1.4：等比数列の収束

解説：等比数列 $\{\alpha^n\}$ は公比 α の値によって全く異なる振る舞いをするので注意が必要です。振る舞いが変わる境界は 1, 0, –1 の３つです。まずはそこで場合分けして、極限を調べます。最後に結果を整理します。

解答例）

(i) $\alpha > 1$ のとき等比数列は n とともに際限なく大きくなるので、プラス無限大に発散する。

(ii) $\alpha = 1$ のとき等比数列の値は常に 1 なので、その極限も 1。

(iii) $0 < \alpha < 1$ のとき等比数列の値は常にプラスだが、1 より小さい数をかけることによって、絶対値はどんどん小さくなる。（たとえば α が 0.9 の場合は n が一つ増えるごとに値が 1 割ずつ小さくなる。）どんなに小さいプラスの数をとっても n が十分に大きくなれば、数列の値はその数よりも 0 に近い値になるので、等比数列の極限は 0。

(iv) $\alpha = 0$ のとき等比数列の値は常に 0 なので、その極限も 0。

(v)　$-1<\alpha<0$ のとき等比数列の値はプラスとマイナスの符号を交互に取るが、その絶対値は(iii)のケースと全く同様に 0 に限りなく近づいていく。よって極限は 0。

(vi)　$\alpha\le -1$ のとき数列の値はプラスとマイナスの符号を交互にとる。しかも、絶対値は 1 よりも大きいため、収束することはない。つまり、このとき等比数列は震動する。

以上の結果をまとめると

$\alpha>1$ のとき $+\infty$、　$\alpha=1$ のとき 1、　$-1<\alpha<1$ のとき 0、　$\alpha\le -1$ のとき振動

となる。

問 1.5：円の面積公式の証明

(1)　円に内接する正 n 角形は、n 個の合同な二等辺三角形に分解され、各二等辺三角形の面積は（底辺×高さ）÷２なので

$$\frac{a_n\times h_n}{2}$$

正 n 角形の面積はその n 倍だから、

$$S_n=\frac{1}{2}n\cdot a_n\times h_n$$

となる。

(2)　$n\cdot a_n$ は正多角形の周の長さであり、図から明らかなように正多角形はどんどん円に近づくので、その周の長さも円の周の長さ $2\pi r$ に近づく。つまり、

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot a_n=2\pi r$$

一方、二等辺三角形の高さ h_n は（やはり図から明らかなように）円の半径の長さ r に近づく。つまり、

$$\lim_{n\to\infty} h_n=r$$

(3)　(2)の結果を当てはめると定理 1.1(3)より

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n\cdot a_n\times h_n\right)=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}n\cdot a_n\right)\times\left(\lim_{n\to\infty}h_n\right)=\frac{1}{2}(2\pi r)\times(r)=\pi r^2$$

つまり、円の面積は円周率×半径×半径になることが予想される。

解説：これが円の面積の公式の証明です。

問1.6：不定形の極限

例　(1)　$a_n=1/n^2, b_n=1/n$　　(2)　$a_n=1/n, b_n=1/n^2$　　(3)　$a_n=-1/n, b_n=1/n^2$

(4)　$a_n=(-1)^n/n, b_n=1/n$

解説：すべての数列は分母だけがプラス無限大に発散するので、0 に収束することがわかります。それぞれ比 a_n/b_n をとると、

(1) $1/n$, (2) n, (3) $-n$, (4) $(-1)^n$ となり、条件を満たしていることが確認できます。分母と分子がともに 0 に収束することがわかっても、それだけでは、その比がどのように振舞うかはわかりません。つまり、極限は不定なのです。

問 1.7:発展問題

解説：ε-N 論法の使用例として、定理 1.1 を証明します。(1)と(2)は最も基本的な証明です。(3)と(4)はやや難しいかもしれません。最終的に任意の ε に対して極限値の ε 近傍から外に出なくなることを示せばよいのです。

定理 1.1(1)と(2)の証明

まず ε を任意の正の値に固定する。すると、

数列 $\{a_n\}$ は α に収束するので、すべての $n > N_1$ に対して

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

が成立するような自然数 N_1 が存在する。

同様に数列 $\{b_n\}$ は β に収束するので、すべての $n > N_2$ に対して

$$\beta - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < \beta + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

が成立するような自然数 N_2 が存在する。　N_1 と N_2 のうち大きい方の値を N とすると、(1)(2)よりすべての $n > N$ に対して

$$\alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < a_n + b_n < \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

つまり、

$$\alpha + \beta - \varepsilon < a_n + b_n < \alpha + \beta + \varepsilon \tag{3}$$

となる。(3)式は（n が N という値を超えると）数列 $\{a_n + b_n\}$ が $\alpha + \beta$ の ε 近傍に収まることを意味する。つまり、どんなに小さい ε をとっても必ず $\alpha + \beta$ の ε 近傍の外に出なくなるので、定義により、この数列 $\{a_n+b_n\}$ は $\alpha+\beta$ に収束することが証明された。式で表わせば

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

となること、すなわち定理 1.1(1)が証明された。

　次に、(2)を書き換えると、

$$-\beta - \frac{\varepsilon}{2} < -b_n < -\beta + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2'}$$

となる。(1)と(2')式より、

$$\alpha - \beta - \varepsilon < a_n - b_n < \alpha - \beta + \varepsilon \tag{4}$$

となることから、数列 $\{a_n - b_n\}$ は $\alpha - \beta$ に収束することが証明された。式で表わせば

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

となること、すなわち定理 1.1 (2)が証明された。

定理 1.1(3)と(4)の証明

解説　(3)と(4)は極限値の符号によって、不等式の扱いが異なるため、ここでは収束先の値がともに正の場合、すなわち

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha > 0,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta > 0$

の場合に限定して解答を紹介します。

(3)の証明　まず ε を任意の正の値に固定する。すると、

$0 < \varepsilon_1 < \alpha,\quad 0 < \varepsilon_2 < \beta,\quad \varepsilon_2\alpha + \varepsilon_1\beta + \varepsilon_1\varepsilon_2 < \varepsilon$

の３条件を満たす $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が存在する（第３の条件も $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を 0 に十分に近い正の数にすれば成立することに注意）。数列 $\{a_n\}$ は α に収束するので、すべての $n > N_1$ に対して

$$0 < \alpha - \varepsilon_1 < a_n < \alpha + \varepsilon_1 \tag{5}$$

が成立するような自然数 N_1 が存在する。
同様に数列 $\{b_n\}$ は β に収束するので、すべての $n > N_2$ に対して

$$0 < \beta - \varepsilon_2 < b_n < \beta + \varepsilon_2 \tag{6}$$

が成立するような自然数 N_2 が存在する。N_1 と N_2 のうち大きい方の値を N とすると、(5)と(6)よりすべての $n >$ N に対して

$$(\alpha - \varepsilon_1)(\beta - \varepsilon_2) < a_n b_n < (\alpha + \varepsilon_1)(\beta + \varepsilon_2)$$

が成り立つ。ここで、第３条件より

$(\alpha + \varepsilon_1)(\beta + \varepsilon_2) = \alpha\beta + \varepsilon_2\alpha + \varepsilon_1\beta + \varepsilon_1\varepsilon_2 < \alpha\beta + \varepsilon$

$(\alpha - \varepsilon_1)(\beta - \varepsilon_2) = \alpha\beta - \varepsilon_2\alpha - \varepsilon_1\beta + \varepsilon_1\varepsilon_2 > \alpha\beta - \varepsilon_2\alpha - \varepsilon_1\beta - \varepsilon_1\varepsilon_2 > \alpha\beta - \varepsilon$

となるから、すべての $n > N$ に対して

$$\alpha\beta - \varepsilon < a_n b_n < \alpha\beta + \varepsilon \tag{7}$$

となる。(7)式は N を超えると数列 $\{a_n b_n\}$ が $\alpha\beta$ の ε 近傍に収まることを意味する。よって定義により、この数列 $\{a_n b_n\}$ は $\alpha\beta$ に収束することが証明された。式で表わせば

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \alpha \cdot \beta$$

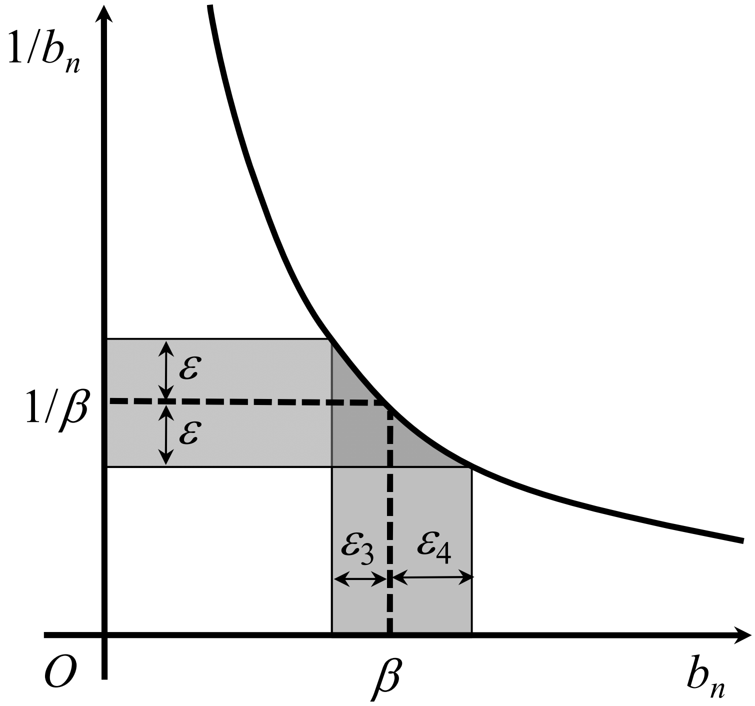
となること、すなわち定理 1.1(3)が証明された。

(3)の証明終わり

解説：最初に３つの条件が出てきて、びっくりするかもしれませんが、解答を始めてすぐにこれらの条件が思い浮かぶわけではありません。証明をするためには任意に定めて ε に対して(7)式が成り立たなければなりません。そのために数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がどのような条件を満たすべきかを考えるという具合に、結論からさかのぼって証明を考えていくのです。

(4)の証明　$a_n / b_n = a_n \times (1/b_n)$ であるから「数列$\{1/b_n\}$が $1/\beta$ に収束する」ならば、すでに証明された(3)より (4)も成立することになる。つまり、「数列$\{1/b_n\}$が $1/\beta$ に収束する」ことだけを証明すればよい。

　ここでは数列$\{b_n\}$が正の値に収束すると仮定したので、ある自然数を超えると数列の値は全て正になる。数列の値が正であるとき、$\{b_n\}$と$\{1/b_n\}$とは大小関係が逆転するけれども、数列$\{b_n\}$の値が十分にβに近づけば、数列$\{1/b_n\}$は $1/\beta$ に近づかざるをえないから$\{1/b_n\}$の収束は直感的には自明である（下の図を参照）。



　これを定義に即して証明しよう。やはり任意の正数 ε をまず固定する。数列の値が極限値 $1/\beta$ の ε 近傍に収まる、つまり

$$\frac{1}{\beta} - \varepsilon < \frac{1}{b_n} < \frac{1}{\beta} + \varepsilon$$

となるためには、数列$\{b_n\}$の値が

$$\beta - \varepsilon_3 < b_n < \beta + \varepsilon_4$$

となるぐらいに β に近づけば良い。ここで $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ は

$$\beta - \varepsilon_3 = \frac{1}{1/\beta + \varepsilon}, \quad \beta + \varepsilon_4 = \frac{1}{1/\beta - \varepsilon}$$

を満たす定数である。図からもわかるように、必ず

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon\beta^2}{1 + \varepsilon\beta} < \frac{\varepsilon\beta^2}{1 - \varepsilon\beta} = \varepsilon_4$$

←誤りがありましたので修正しました。2011 年 7 月 1 日

となるから、数列$\{b_n\}$がβのε_3 近傍に入る条件だけを考えればよい（ε_3 近傍はε_4 近傍に含まれるので、ε_3 近傍から外に出ないならば、ε_4 近傍から外に出ることもない）。数列$\{b_n\}$がβ に収束することから、すべての $n > N$ に対して

$$|b_n - \beta| < \varepsilon_3 \quad すなわち \quad \beta - \varepsilon_3 < b_n < \beta + \varepsilon_3$$

が成立するような自然数 N が存在する。最後の式の逆数を取ると

$$\frac{1}{\beta+\varepsilon_3}<\frac{1}{b_n}<\frac{1}{\beta-\varepsilon_3}$$

ここで $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ の定義より、

$$\frac{1}{\beta-\varepsilon_3}=\frac{1}{\beta}+\varepsilon \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{\beta+\varepsilon_3}>\frac{1}{\beta+\varepsilon_4}=\frac{1}{\beta}-\varepsilon$$

であるから、

$$\frac{1}{\beta}-\varepsilon<\frac{1}{b_n}<\frac{1}{\beta}+\varepsilon \quad \text{すなわち} \quad \left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\beta}\right|<\varepsilon$$

これが全ての $n>N$ に対して成り立つので、定義により数列 $\{1/b_n\}$ が $1/\beta$ に収束する。

(4)の証明終わり

問 1.8:発展問題

偽　反例　$a_n=(-1)^n$

解説：この数列はそのままだといつまでも振動して収束しません。しかし、２乗するとずっと値が１なので１に収束します。

問 1.9:発展問題

解説：まず、この数列が収束するのかどうかの見当をつけるところからはじめます。$\{a_n\}$ は a に収束するので、十分に大きい N 以降（たとえば第１億項以降）は値がほぼ a となっているとします。すると、すべての $n>N$ に対して

$$b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{n}+\frac{a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}\approx\frac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{n}+\frac{(n-N)}{n}a$$

となります。ここからさらに n を大きくしていくと、第１項は「 定数/n 」なのでゼロに収束します（N が固定されていることに注意）。一方、第２項の a の係数は 1 に収束しますね。したがって、

$$\lim_{n\to\infty} b_n \approx 0+a=a$$

になると予想されます。しかし、この議論では「第 N 項以降はほぼ a になっている」という曖昧な事実に基づいているので厳密な解答とは言えません。

数列 $\{b_n\}$ が a に収束することは間違いなさそうなので、あとはこれを厳密に証明すればよいのです。これまでは「数列 $\{b_n\}$ が a の ε 近傍に入る」ことを２つの不等式で

$$a-\varepsilon<b_n<a+\varepsilon$$

と表現してきましたが、これを絶対値を使って

$$|b_n-a|<\varepsilon$$

と１つの不等式で表現することができます。絶対値は扱いに気を付けなければなりませんが、こちらの方が不等式の数が１つなので証明が簡潔にできます。以下の解答例では、この表現法を使っています。証明のゴールは任意の正の ε に対して、ある N が存在して、N より大きい全ての n について、この絶対値の不等式が成り立つことを示すことです。

解答）まずεを任意の正の値に固定する。すると、数列$\{a_n\}$はaに収束するので、すべての$n > N_1$に対して

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

が成立するような自然数N_1が存在する。

ここで、すべての$n > N_1$に対して

$$|b_n - a| = \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} + \frac{a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n} - a \right|$$

$$= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} + \frac{(a_{N_1+1} - a) + (a_{N_1+2} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} - \frac{N_1}{n} a \right|$$

$$< \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} \right| + \left| \frac{(a_{N_1+1} - a) + (a_{N_1+2} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| + \left| \frac{N_1}{n} a \right|$$

（最後の不等式について補足：一般に任意の３つの実数x,y,zについて$|x + y - z| < |x| + |y| + |z|$が成り立つことに注意）

ここで(1)より、第２項目の分数の分子の各カッコの値はすべて$\varepsilon/3$より小さく、項数は$n\text{–}N_1$項なので、すべての$n > N_1$に対して

$$\left| \frac{(a_{N_1+1} - a) + (a_{N_1+2} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| < \frac{n - N_1}{n} \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

が成り立つ。

また、第１項と第３項の絶対値の中身はともに「定数 $/n$」であるから 0 に収束する。したがって、すべての$n > N_2$に対して

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{かつ} \quad \left| \frac{N_1}{n} a \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (3)$$

が成立するような自然数N_2が存在する。

よって、２つの自然数N_1とN_2のうち大きい方をNとすると、(2)と(3)よりすべての$n > N$に対して

$$|b_n - a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

が成り立つ。任意の正数εに対して、このようなNは必ず存在するので、定義により$\{b_n\}$はaに収束する。

解答終わり