第 2 章　章末問題の解答

問2.1　基礎概念確認

(1) 有界で単調な実数の数列は必ず収束する。この性質が実数には隙間がないことを意味していることがわかりますか？有理数のように隙間があると、有界で単調な数列の収束先が存在しないということが起こってしまうのです。

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

(3) 約 2.718　より正確な数字を暗記することにはそれほど意味がありません。

問2.2　無限等比数列の和の計算

解説：等比数列の和の公式に当てはめると、初項が a 、公比が r の数列の第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

となります。無限等比数列の和はこの極限です。公比 r が1未満の場合は

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a(1-\lim_{n\to\infty} r^n)}{1-r} = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

となりますが、公比 r が1以上の場合は発散してしまい、極限が存在しないことに注意しましょう。

(1)　初項 1、公比 0.2 なので、　$1+0.2+(0.2)^2+(0.2)^3+(0.2)^4\cdots = \frac{1}{1-0.2} = \frac{5}{4}$

(2)　初項 1、公比 1/7 なので、　$1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^4}+\cdots = \frac{1}{1-1/7} = \frac{7}{7-1} = \frac{7}{6}$

(3)　初項 3^4、公比 1/3 なので、　$3^4+3^3+3^2+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{3^4}{1-1/3} = \frac{3^5}{2} = \frac{243}{2}$

(4)　$1+3+3^2+3^3+3^4+\cdots$　この数列は公比が 3 で 1 より大きいので和はプラス無限大に発散してしまう。

(3)と(4)は似ていますが、減少する場合と増加する場合では結論が全く異なります。

問 2.3　無限等比数列の和の応用

循環小数は無限等比数列の和として表現できます。あとは問 2.2 と同じく公式を使えば分数で表現できます。

$$0.123123123123123123\cdots = 0.123+0.000123+0.000000123+0.000000000123+\cdots$$
$$= 0.123+\frac{0.123}{1000}+\frac{0.123}{1000^2}+\frac{0.123}{1000^3}+\cdots$$

初項 0.123、公比 1/1000 の無限等比数列の和なので、

$$:= \frac{0.123}{1-1/1000} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$

問 2.4　Excel での計算演習：自然対数の底

エクセルの A1 のセルに n、B1 のセルに A1 の n に対応する数列 a_n の値を計算します。

まず、A1 のセルに適当な自然数を入れておきましょう。下の例では n に 10 を入れています。

	A	B	C
1	10		
2			

次に B1 のセルに数列の値を計算させます。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

という数式に対応する式を B1 のセルに入力しますが、n に入る数字は A1 のセルに入っているので、

=(1+1/A1)^A1

となります。注意：記号 ^ は累乗の指数を表現するのに使われます。例えば 3^4 は 3^4 を意味します。

この式を B1 に入力して、Enter キーを押すと、

	A	B	C
1	10	2.593742	
2			

と表示されます。A1 に入る数字を少しずつ大きくしてみましょう。すると

A1 の値	B1 の値
50	2.691588
100	2.704814
500	2.715569
1000	2.716924
5000	2.71801
10000	2.718146

のように値が少しずつ大きくなりますが、際限なく大きくなることはなく、およそ 2.718281828 ぐらいの数に近づいていくことがわかります。

問 2.5　応用問題：駐車場の価値

n 年後の 10 万円の現在価値は

$$\frac{10}{(1+0.03)^n}$$

万円となる（この金額を銀行預金などで運用すれば n 年後には 10 万円になるから）。

駐車場の価値は、駐車場が将来もたらす全ての収入の現在価値の総和なので、最初の収益が 1 年後に発生するとすれば、

$$\frac{10}{1+0.03}+\frac{10}{(1+0.03)^2}+\frac{10}{(1+0.03)^3}+\frac{10}{(1+0.03)^4}+\frac{10}{(1+0.03)^5}+\cdots$$

万円となる。これは無限等比数列の和なので、公式より、

$$\frac{10/1.03}{1-1/1.03}=\frac{10}{0.03}=\frac{1000}{3}=333.\dot{3}$$

万円（約 333 万円）となる。

お詫び：略解の解答が間違っていました。すみません。ちなみに略解の 1030/3 万円（約 343 万円）は最初の収益がすぐに発生する場合の価値です（駐車場の 1 年分の使用料を前金でもらう場合の価値）。

問 2.6　応用問題：プチ・ニューディール政策の効果

(1) 400 万円の追加的な所得の増加とそれが生み出す派生需要による所得増加の総和は

$$400+\frac{400}{2}+\frac{400}{2^2}+\frac{400}{2^3}+\frac{400}{2^4}+\cdots$$

万円である。これも無限等比数列の和なので、公式より

$$=\frac{400}{1-1/2}=800$$

万円が所得増加の総額になるはずである。

(2) 解説：そもそもこの失業者に支払う 400 万円はどこから捻出したのでしょうか。今の日本政府のように財政事情が厳しい国では、税金または借金によってこれを賄わなければなりません。400 万円分だけ余計に税金を課せば、その分人々の所得が減り、それに伴って消費も減少するはずです。国が借金をすれば、短期的には増税をする必要はありませんが、いずれはその負担が国民に降りかかります。それを予想すれば国民は今から消費を節約するかもしれません。

もっと詳しい議論を知りたい方は次を読んでみてください。

小島寛之 2008 年「容疑者ケインズ」プレジデント社　の第 1 章

問 2.7　発展問題：自然対数の底 e の定義に慣れるための問題

(1) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

となるので、定理 1.1 (3) より e^2 に収束することがわかる。あるいは

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^2$$

として、[　]の中が e に収束することから、e^2 に収束すると判定することもできる。（厳密に言うと、この主張は２次関数 x^2 が連続関数であることを前提にして議論をしています。詳しくは第 4 章を参照してください。）

(2) $$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\times\frac{1}{2}}=\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}$$

とする。ここで [ ]の中の $2n$ は自然数（2 の倍数）をとりながら無限に大きくなるので、定義により自然対数の低 e に収束することがわかる。このことから、数列は全体として、$e^{1/2}$ に収束すると判定することができる。（やはり厳密に言うと、この主張は無理関数 $x^{1/2}$ が連続関数であることを前提にして議論をしています。）

問 2.8　発展問題

(1)　有界であることの証明）数列の第 n 項を

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

とする。有限であることを示せば良いので、以下では n が十分に大きい自然数であるとして議論する。テキストのヒントにある二項定理

$$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}b + \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}a^{n-2}b^2 + \frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}a^{n-3}b^3 + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}a^{n-k}b^k$$

ただし、$n! = 1\times 2\times\cdots\times n$、また $0! = 1$ とする。

に当てはめると、

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^n + n\cdot 1^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}\cdot 1^{n-2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}\cdot 1^{n-3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + n\cdot 1\cdot\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + n\cdot\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n}$$

ここで第 k 項 $(3 \le k \le n)$ に注目する。階乗の計算に注意すると、

この部分は k 個の自然数の積になっていることに注意

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{\boxed{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}$$

$$= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}$$

$$= \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

括弧の中の数字は全て1より小さいので

$$< \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4\times\cdots\times k} < \frac{1}{1\times 2\times 2\times 2\times\cdots\times 2} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

つまり、第 k 項 $(3 \le k \le n)$ は 2^{k-1} より小さい。よって

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}} < 1 + 1 + 1 = 3$$

この和はどんなに大きくなってもその極限 1 を超えることはない。

この数列は３を超えることはないので有界である。

証明終わり

(2)　単調増加であることの証明）$a_n < a_{n+1}$ を示せば良い。

(1)で示したように、a_n は二項定理によって、次のように展開される。

$$a_n = 1+1+\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^n}$$

展開したときの第1項と第2項はともに1で全ての a_n に共通である。再び第 k 項 $(3 \leq k \leq n)$ に注目する。

(1)の計算結果を再利用すると、a_n の第 k 項 $(3 \leq k \leq n)$は

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}=\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

一方、a_{n+1}の第 k 項 $(3 \leq k \leq n)$は、

$$\frac{(n+1)!}{k!\cdot(n+1-k)!}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}=\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\times\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

である。これらを比較すると

$$\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\times\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

が成り立つ。つまり、a_nとa_{n+1}とを比較すると、第1項と第2項は1で共通。第 k 項 $(3 \leq k \leq n)$はすべてa_{n+1}の方が a_n よりも大きい。しかもa_{n+1} は項数が一つ多く、第 $n+1$ 項

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}>0$$

がある。よって、$a_n < a_{n+1}$ 。つまり、この数列は単調増加である。

証明終わり

この証明により、数列は必ず収束し、極限が存在することがわかります（実数の連続性）。その極限が自然対数の底 e なのです。