第 3 章　章末問題の解答

問 3.1　基礎概念確認

解説：厳密な定義を理解したら、なるべく自分の言葉で数学上の概念を説明できるようになりましょう。定義はテキスト本文の中にありますので、ここでは模範解答の例を紹介しましょう。

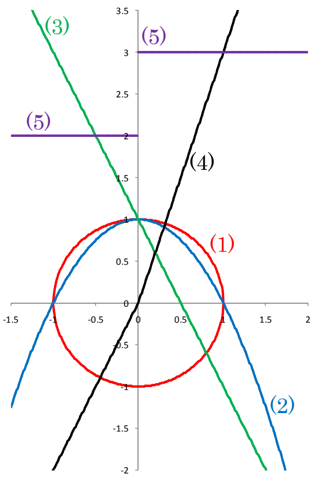
関数	ある変数の値に対して、他の変数の値がただ一つに定まるような変数間の関係
方程式	変数間の関係を示す等式
定義域	関数の独立変数が取りうる値の集合
値域	関数の値が取りうる値の集合
逆関数	一対一対応の関数において、独立変数と従属変数の関係を逆にした関数
連続関数	独立変数が連続的に変化するときに、従属変数も連続的に変化するような関数
定値関数	どんな独立変数の値に対しても常に一定の値を取る関数
合成関数	ある関数の独立変数のところに、他の関数を入れることでできる入れ子型の関数

問 3.2　基礎概念確認

$y = f(x)$の意味：変数 y は変数 x の関数である（ちなみに、その関数の名前が f である）。

$f(3)$：独立変数の値が 3 のときの関数 f の値。

問 3.3　関数関係の判定



解説：グラフを書いて判定するのが一番わかりやすいでしょう。右の図を見て下さい。

垂直線とグラフとの交点が必ず一つだけなら、y は x の関数となり、

水平線とグラフとの交点が必ず一つだけなら、x は y の関数となります。

(1)　$x^2 + y^2 = 1$　答　D　　x と y の間に関数関係はない。

解説：垂直線とも水平線とも２つの交点を持つことがあるので関数関係はない。

(2)　$x^2 + y = 1$　　答　A　　y は x の関数であるが、x は y の関数ではない。

解説：垂直線との交点は１つだが、水平線との交点は２つになることがある。

(3)　$2x + y = 1$　　答　C　　y は x の関数であり、かつ x も y の関数である。

解説：傾きのある直線は垂直線との交点も必ず１つ、水平線との交点も必ず一つです。

(4)　$y = \begin{cases} 3x & \text{if } x \ge 0 \\ 2x & \text{if } x < 0 \end{cases}$

答　C　　y は x の関数であり、かつ x も y の関数である。

解説：関数式が場合分けされているので、逆の関数関係がないと思ったら間違いです。どんな y の値に対しても x の値は一意に定まります。ちなみに関係式は次のようになります。

$$x = \begin{cases} y/3 & \text{if } y \ge 0 \\ y/2 & \text{if } y < 0 \end{cases}$$

グラフを見ても一対一関係になっていることがわかりますね。

(5)　$y=\begin{cases}3 & \text{if } x \geq 0 \\ 2 & \text{if } x < 0\end{cases}$

答　A　　y は x の関数であるが、x は y の関数ではない。

解説：y の値が 2 または 3 のときには、x の値が複数対応するので、x は y の関数とは言えません。

問 3.4　関数関係の判定

(4)以外では、２変数が一対一の関数関係（問 3.3 の C に相当）にあり、関係式はそれぞれ次のようになる。

(1)　$xy=1$　(2)　$V=x^3$　(3)　$2x+3y=10$　(5)　$R=1.03^Y$

ただし、いずれも変数の取りうる値はプラスのみである。

(4)それぞれの日の体重の決め方がきちんと定まっていれば、体重 W は D の関数になる。しかし、体重が同じ日が複数あるかもしれない。そういう日があれば、体重 W がわかっても対応する日 D が一つに定まらないので、D は W の関数にならない。また、人の体重は体調などによっても微妙に変化するので、関係が数式でかけるほど正確な規則性がないのが普通。ただし、当てはまりの良い近似関数を見つけることはできるかもしれない。

問 3.5　合成関数の分解

解説：分解の仕方は一つとは限りません。それぞれ２つ例をあげておきましょう。

		分解例１	分解例２
(1) $y=\sqrt{2x-1}$	$\Rightarrow$	$y=\sqrt{u}$　&　$u=2x-1$	$y=\sqrt{v-1}$　&　$v=2x$
(2) $y=e^{x^2+1}$	$\Rightarrow$	$y=e^u$　&　$u=x^2+1$	$y=e^{v+1}$　&　$v=x^2$
(3) $y=\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$	$\Rightarrow$	$y=\ln u$　&　$u=\dfrac{1}{x^2}$	$y=\ln\dfrac{1}{v}$　&　$v=x^2$

いずれの例でも後の関数を前の関数に代入すると、与えられた関数式になることを確認してください。

問 3.6　発展問題

「$y=f(x)$ と $z=g(y)$ の合成関数 $z=g(f(x))$ が連続関数ならば、$f(x)$ は必ず連続関数である。」

この命題は偽である。一番簡単な反例として、f が次のような階段関数である場合を考えよう。

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0\end{cases}$$

この関数は $x=0$ のところで不連続である。たとえば、関数 g が常に値 a をとる定値関数であれば、合成関数 $z=g(f(x))$ もまた、すべての x に対して値 a をとる定値関数になる。定値関数は切れ目のない水平な直線グラフを持つ連続関数である。つまり、合成関数 $g\circ f$ は連続なのに f は不連続だから、この例は命題に反している。

一般に関数 g が定値関数であれば、f が不連続でも合成関数 $g\circ f$ は必ず連続になる。

もちろん、関数 g が定値関数である必要はない。上の例では関数 g が $g(0)=g(1)$を満たせば、合成関数は連続になる。たとえば、

$g(y)=(y-0.5)^2$とすると、$g(0)=g(1)=0.5^2=0.25$となり、合成関数 $z=g(f(x))$ はすべての x に対して値 0.25 を返す定値関数になる。この例からわかるように、f が不連続でグラフに切れ目があっても、g がそれを繋ぐような性質を持っていれば、合成関数 $z=g(f(x))$ は連続関数になりうるのである。

このことがわかると、少し面白い反例を作ることもできる。

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{if } x\geq 1 \\ -x & \text{if } x<1 \end{cases} \quad \text{かつ} \quad g(y)=y^2$$

とする。f は $x=1$ のところで不連続である（値が－1 から 1 にジャンプする）。しかし、合成関数は

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \begin{cases} x^2 & \text{if } x\geq 1 \\ (-x)^2 & \text{if } x<1 \end{cases} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

となって、下に凸の放物線を持つ２次関数になること、つまり連続関数になることがわかる。