第 4 章　章末問題の解答

問 4.1　基礎概念確認

(1)　$\lim_{x \to 3} f(x) = 7$　　x の値が 3 に近づくとき関数 $f(x)$の値は極限値 7 に収束する。

「x の値が 3 に近づくとき関数 $f(x)$の値は 7 に近づく」でもよい。

(2)　$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$　　x の値がマイナス無限大に発散するとき関数 $g(x)$の値はプラス無限大に発散する。

問 4.2　基礎概念確認

関数の極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在しない場合には次のような 3 つのケースがある。

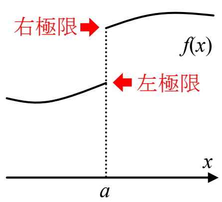
①右極限と左極限が一致しないケース　　例：下図のケース①

②発散するケース　　例：下図のケース②A,B,C,D

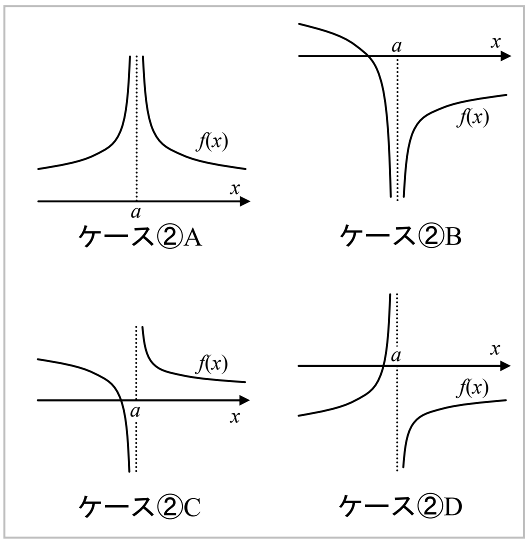
注意：②A のケースは $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$、②B のケースは $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ と表現されるが、記号 $\infty, -\infty$ は発散することを表現しているのであって、これらは極限値ではない。②C と②D のケースでは発散の仕方も特定できないので、式では表現できない。

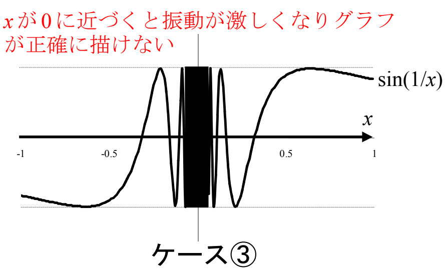
③振動するケース　　これは非常に稀なケースだが次のような例がある。下図のケース③

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$



ケース①





ケース③

問 4.3　基礎概念確認

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つのは、関数 $f(x)$が $x = a$ において連続な場合。

そうでない場合には、この式が成り立たないことに注意。

問 4.4　計算練習問題

次の関数の極限を求めよ。

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x \ge 3 \\ x & \text{if} \quad x < 3 \end{cases}$ とするとき、$\lim_{x\to 3} f(x)$

x の値を右から 3 に近づけるときの極限（右極限）が 9 であるのに対し、左から近づけるときの極限（左極限）が 3 で一致しないので、この場合極限値は存在しない。

(2) $g(x)=\begin{cases} 2x & \text{if} \quad x \ne 2 \\ 0 & \text{if} \quad x = 2 \end{cases}$ とするとき、$\lim_{x\to 2} g(x)$

x の値を右から 2 に近づけても、左から 2 に近づけても、関数の値は 4 に近づくので、極限値は 4 である。

式で表せば、$\lim_{x\to 2} g(x) = 4$

解説：$x \to 2$ のときの極限値は、$x = 2$ のときの関数の値 0 とは無関係であることを確認しよう。

(3) $h(x)=\begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x \ge 1 \\ 1 & \text{if} \quad x < 1 \end{cases}$ とするとき、$\lim_{x\to 1} h(x)$

x の値を右から 1 に近づけても、左から 1 に近づけても、関数の値は 1 に近づくので、極限値は 1 である。

式で表せば、$\lim_{x\to 1} h(x) = 1$

(4) (5) (6) は全て連続関数の極限なので、$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つから、

(4) $\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$ (5) $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$ (6) $\lim_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0$

問 4.5 計算練習問題

以下の各関数について、「$x\to\infty$のとき」、「$x\to 0$ のとき」、「$x\to -\infty$のとき」の極限値があれば求めよ。

(1) x^3 (2) $\dfrac{1}{x}$ (3) e^x (4) $\dfrac{2x+1}{x-2}$ (5) $\dfrac{1}{e^x}$

(6) $\dfrac{1}{x^2}$ (7) $\sin x$ (8) $\cos x$ (9) $\sqrt{x}$ (10) $\ln x$

解答は以下の通り。

$x \to$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	2	0	0	なし	なし	$+\infty$	$+\infty$
0	0	なし	1	$-1/2$	1	$+\infty$	0	1	0	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	0	0	2	$+\infty$	0	なし	なし		

解説

(2)で x が 0 に近づくときの極限値を$+\infty$、つまり「プラス無限大に発散する」と解答してしまう人が多いですが、それは右から（プラスの値から）ゼロに近づける場合です。反対に左から（マイナスの値から）0 に近づけるとプラスではなく、マイナス無限大に発散して

しまいます。近づけ方によって発散の仕方が定まらないので、この場合は「極限はない」と判断されます。問 4.2 の解答のケース②C にあたります。

(4)は分母と分子を x で割って

$$\frac{2x+1}{x-2}=\frac{2+1/x}{1-2/x}$$

とすると、$1/x$ は x がプラスに発散してもマイナスに発散しても 0 に収束するので、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x-2}=\frac{2+0}{1-0}=2$$

となります。

(9)の無理関数と、(10)の対数関数は負の実数に対しては定義されませんので、$x\to-\infty$のときの極限を考える必要はありません。いずれも x が増えたときの関数の値の増え方は x が大きくなるにつれて徐々に小さくなるので収束するような気もしますが、実は発散してしまいます。関数の値にもうこれ以上大きくならないというような上限がないからです。

問 4.6　計算練習問題

解説：(4) 以外は定理 4.1 に当てはまるケースなので、次々に極限値を特定していけばよいのです。

(1) $\lim_{x\to 0}(x+e^x)=\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}e^x=0+e^0=0+1=1$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{\lim_{x\to-\infty}e^x}{1+\lim_{x\to-\infty}e^x}=\frac{0}{1+0}=0$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x-1}{x^2+2x+2}=\frac{\lim_{x\to 1}x^2-\lim_{x\to 1}3x-1}{\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}2x+2}=\frac{1-3\times 1-1}{1+2\times 1+2}=-\frac{3}{5}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-3e^x-1}{\ln(x+1)}$

分子： $\lim_{x\to 0}(e^{2x}-3e^x-1)=1-3\times 1-1=-3$

分母：$\lim_{x\to 0}\ln(x+1)=\ln 1=0$

分子がマイナスの定数に収束し、分母が 0 に収束するので、分数の値の絶対値は発散する。分母が 0 に収束するときプラスの符号もマイナスの符号も取りうるので、プラス無限大に発散するともマイナス無限大に発散するとも言えず、「極限値は存在しない」としか言えない。

問 4.7　不定形の極限

次の関数の極限を求めよ。不定形の極限に注意。

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(x^3-x^4\right)=\lim_{x\to\infty}x^3(1-x)=\infty\times(-\infty)=-\infty$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{0+1}{1}=1$

分母と分子をともに x で割っています。

(3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1/x+1/x^2}{1+2/x+1/x^2}=\dfrac{\lim_{x\to\infty}(1/x)+\lim_{x\to\infty}(1/x^2)}{1+2\times\lim_{x\to\infty}(1/x)+\lim_{x\to\infty}(1/x^2)}=\dfrac{0+0}{1+2\times 0+0}=\dfrac{0}{1}=0$

分母と分子をともに x^2 で割っています。

(4) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+4}{2x^3+5x+1}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1+4/x^3}{2+5/x^2+1/x^3}=\dfrac{1+4\times\lim_{x\to-\infty}(1/x^3)}{2+5\times\lim_{x\to-\infty}(1/x^2)+\lim_{x\to-\infty}(1/x^3)}=\dfrac{1+4\times 0}{2+5\times 0+0}=\dfrac{1}{2}$

分母と分子をともに x^3 で割っています。

(5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^2-1}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+2)=0+2=2$

(6) $\lim_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x^2+xa+a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^2+xa+a^2)=(a^2+a\times a+a^2)=3a^2$

(7) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$

分母と分子にともに e^x をかけています。

(8) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+4}{2x^3+5x+1}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1+4/x^3}{2+5/x^2+1/x^3}=\dfrac{1+4\times\lim_{x\to-\infty}(1/x^3)}{2+5\times\lim_{x\to-\infty}(1/x^2)+\lim_{x\to-\infty}(1/x^3)}=\dfrac{1+4\times 0}{2+5\times 0+0}=\dfrac{1}{2}$

(9) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+1-x}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\frac{1}{+\infty}=0$$

(10) $\lim_{x\to\infty}\{\ln(x+2)-\ln x\}=\lim_{x\to\infty}\ln\dfrac{x+2}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=\ln(1+0)=0$

(11) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-2x)=\lim_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x}-2\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^2}}-2\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-2\right)$

ここで括弧の中の数字は -1 に収束することがわかるので、

$$=\infty\times(-1)=-\infty$$

問 4.8 関数の極限と自然対数の底 *e*

(1) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\times\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\times\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\times e=e^2$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{2\times\frac{x}{2}}$

ここで x がプラス無限大に発散するとき、$x/2$ もプラス無限大に発散するので、$y=x/2$ と置くと、

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}$$

と書き換えられる。この関数の極限は(1)の極限と同じだから（変数の名前を変えただけ）極限は同じく、

$$=e^2$$

解説：独立変数の名前が変わっても関数の極限値が変わることはない。つまり、

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}$$

であり、定義によりその極限値は自然対数の底 e になる。

(3) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

公式に当てはめるために $y=-x$ とする。すると x がマイナス無限大に発散するとき、y はプラス無限大に発散するので、上の式は次のように書き換えられる。

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y}$$

この極限を調べればよい。

分数全体を−1 乗すると分母と分子が入れ替わる

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y}=\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

ここで再び変数を置き換える。$z=y-1$ とすると、y がプラス無限大に発散するとき、z もプラス無限大に発散するので、最後の式は次のように書き換えられる。

$$=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z+1}=\lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\times\left(1+\frac{1}{z}\right)\right]=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\times\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)=e\times 1=e$$

解説： $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

という関数は、x がプラス無限大に発散するときの極限も、x がマイナス無限大に発散するときの極限も同じ数（定義により、それが自然対数の底 e）になることを(3)の結果は意味している。この事実はテキスト本文の対数関数の微分公式の証明で登場する。

問 4.9：発展問題

ε－δ 論法を使って定理 4.1 の(3)と(4)を証明せよ。

(3) $$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

(4) $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

ただし、議論を簡単にするために次のように仮定してよい。

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha > 0,\quad \lim_{x\to a} g(x) = \beta > 0$$

解説：方針は第 1 章章末問題の問 1.7 にある定理 1.1(3)と(4)の証明と同じです。

(3)の証明） まず ε を任意の正の値に固定する。すると、

$$0 < \varepsilon_1 < \alpha,\quad 0 < \varepsilon_2 < \beta,\quad \varepsilon_2\alpha + \varepsilon_1\beta + \varepsilon_1\varepsilon_2 < \varepsilon$$

の３条件を満たす $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が存在する（第３の条件も $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を 0 に十分に近い正の数にすれば成立することに注意）。関数 f は α に収束するので、$0 < |x-a| < \delta_1$ を満たす全ての x に対して、

$$0 < \alpha - \varepsilon_1 < f(x) < \alpha + \varepsilon_1 \tag{1}$$

が成立するような正の実数 δ_1 が存在します。

同様に関数 g は β に収束するので、$0 < |x-a| < \delta_2$ を満たす全ての x に対して、

$$0 < \beta - \varepsilon_2 < g(x) < \beta + \varepsilon_2 \tag{2}$$

が成立するような正の実数 δ_2 が存在します。δ_1 と δ_2 のうち小さい方の値を δ とすると、(1)と(2)より $0 < |x-a| < \delta$ を満たす全ての x に対して、

$$(\alpha-\varepsilon_1)(\beta-\varepsilon_2) < f(x)\cdot g(x) < (\alpha+\varepsilon_1)(\beta+\varepsilon_2)$$

が成り立つ。ここで、第３条件より

$$(\alpha+\varepsilon_1)(\beta+\varepsilon_2) = \alpha\beta + \varepsilon_2\alpha + \varepsilon_1\beta + \varepsilon_1\varepsilon_2 < \alpha\beta + \varepsilon$$

$$(\alpha-\varepsilon_1)(\beta-\varepsilon_2) = \alpha\beta - \varepsilon_2\alpha - \varepsilon_1\beta + \varepsilon_1\varepsilon_2 > \alpha\beta - \varepsilon_2\alpha - \varepsilon_1\beta - \varepsilon_1\varepsilon_2 > \alpha\beta - \varepsilon$$

となるから、$0 < |x-a| < \delta$ を満たす全ての x に対して、

$$\alpha\beta - \varepsilon < f(x)\cdot g(x) < \alpha\beta + \varepsilon \tag{3}$$

となる。(3)式は x と a との距離が δ 未満になると、関数 $f(x)g(x)$ の値が $\alpha\beta$ の ε 近傍に収まることを意味する。よって定義により、この関数 $f(x)g(x)$ は $\alpha\beta$ に収束することが証明された。式で表わせば

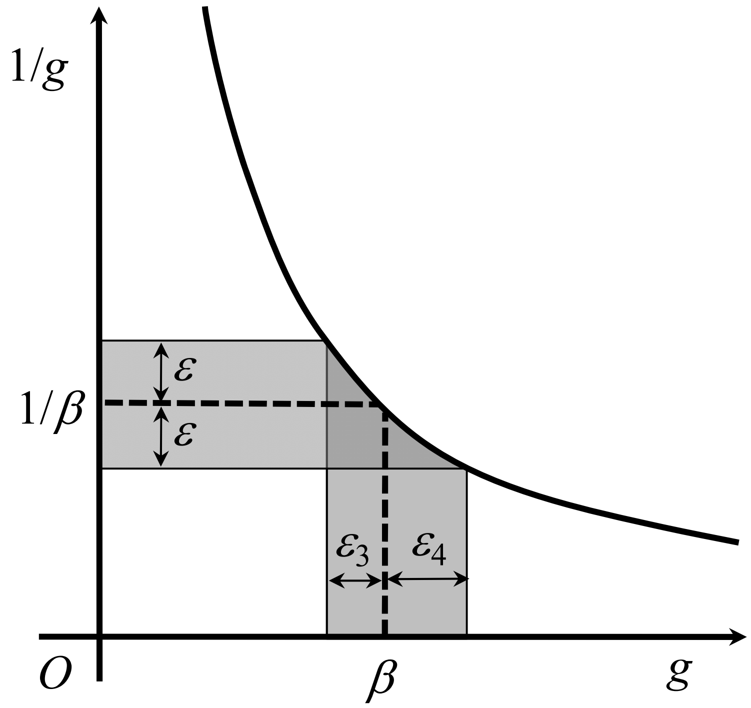
$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \alpha\beta = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

となること、すなわち定理 4.1(3)が証明された。

(3)の証明終わり

(4)の証明 $f(x)/g(x) = f(x)\times(1/g(x))$ であるから「関数 $1/g(x)$ が $1/\beta$ に収束する」ならば、すでに証明された(3)より(4)も成立することになる。つまり、「関数 $1/g(x)$ が $1/\beta$ に収束する」ことだけを証明すればよい。

ここでは関数 $g(x)$ が正の値 β に収束すると仮定したので、x の値が十分に a に近づけば関数 g の値は正になる。関数 g の値が正であるとき、関数 g の値が十分に β に近づけば、関数 $1/g$ は $1/\beta$ に近づかざるをえないから、収束は直感的には自明である（下の図を参照）。



これを定義に即して証明しよう。やはり任意の正数 ε をまず固定する。数列の値が極限値 $1/\beta$ の ε 近傍に収まる、つまり

$$\frac{1}{\beta}-\varepsilon<\frac{1}{g(x)}<\frac{1}{\beta}+\varepsilon$$

となるためには、関数 $g(x)$ の値が

$$\beta-\varepsilon_3<g(x)<\beta+\varepsilon_4$$

となるぐらいに β に近づけば良い。ここで $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ は

$$\beta-\varepsilon_3=\frac{1}{1/\beta+\varepsilon},\quad \beta+\varepsilon_4=\frac{1}{1/\beta-\varepsilon}$$

を満たす定数である。図からもわかるように、必ず

$$\varepsilon_3=\frac{\varepsilon\beta}{1+\varepsilon\beta}<\frac{\varepsilon\beta}{1-\varepsilon\beta}=\varepsilon_4$$

となるから、関数 $g(x)$ が β の ε_3 近傍に入る条件だけを考えればよい（ε_3 近傍は ε_4 近傍に含まれるので、ε_3 近傍から外に出ないならば、ε_4 近傍から外に出ることもない）。関数 $g(x)$ が β に収束することから、$0<|x-a|<\delta$ を満たす全ての x に対して、

$$0<\beta-\varepsilon_3<g(x)<\beta+\varepsilon_3 \tag{4}$$

が成立するような正の実数 δ が存在します。(4)式の逆数を取ると

$$\frac{1}{\beta+\varepsilon_3}<\frac{1}{g(x)}<\frac{1}{\beta-\varepsilon_3}$$

ここで$\varepsilon_3,\varepsilon_4$の定義より、

$$\frac{1}{\beta-\varepsilon_3}=\frac{1}{\beta}+\varepsilon \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{\beta+\varepsilon_3}>\frac{1}{\beta+\varepsilon_4}=\frac{1}{\beta}-\varepsilon$$

であるから、

$$\frac{1}{\beta}-\varepsilon<\frac{1}{g(x)}<\frac{1}{\beta}+\varepsilon \quad \text{すなわち} \quad \left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right|<\varepsilon$$

これが$0<|x-a|<\delta$を満たす全てのxに対して成り立つので、定義により関数$1/g(x)$は$1/\beta$に収束する。

(4) の証明終わり