第 5 章　章末問題の解答

問 5.1　基礎概念確認

解説：微分にはグラフ上の意味や変数が微小変化するときの関係など、多様な意味があります。そうした多様な意味を理解して、微分を深く理解するようにしましょう。

(1)　$f'(3)=7$

解答例１：独立変数の値が 3 のときの関数 f の微分係数の値は 7 である。

解答例２：独立変数の値が 3 から微小に増加するとき、関数 f の値はその 7 倍増加する。

解答例３：独立変数の値が 3 から微小に 1 単位増加するとき、関数 f の値はおよそ 7 単位増加する。

解答例４：関数 $f(x)$ のグラフの点 $(3, f(3))$ における接線の傾きは 7 である。

(2)　$g'(x)=3x+1$

解答例１：関数 $g(x)$ の導関数は $3x+1$ である。

解答例２：任意の独立変数の値 x における関数 g の微分係数の値は $3x+1$ である。

解答例３：独立変数の値が x から微小に増加するとき、関数 g の値はその $(3x+1)$ 倍増加する。

解答例４：独立変数の値が x から微小に 1 単位増加するとき、関数 g の値はおよそ $(3x+1)$ 単位増加する。

解答例５：関数 $g(x)$ のグラフの点 $(x, g(x))$ における接線の傾きは $3x+1$ である。

(3)　$\{3x^2+2\}'=6x$

解答例１：関数 $3x^2+2$ の導関数は $6x$ である。

解答例２：任意の独立変数の値 x における関数 $3x^2+2$ の微分係数の値は $6x$ である。

解答例３：独立変数の値が x から微小に増加するとき、関数 $3x^2+2$ の値はその $(6x)$ 倍増加する。

解答例４：独立変数の値が x から微小に 1 単位増加するとき、関数 $3x^2+2$ の値はおよそ $(6x)$ 単位増加する。

解答例５：関数 $3x^2+2$ のグラフの点 $(x, 3x^2+2)$ における接線の傾きは $6x$ である。

問 5.2　基礎概念確認

「微分係数とは（ **独立** ）変数の（ **微小変化** ）に対する（ **従属** ）変数の変化の（ **比率（または割合）** ）である。」

問 5.3　基礎概念確認

テキスト p.101 の図 5-7 のように不連続点や屈折点では、微分係数が定義できない。関数 $g(x)$ が $x=2$ で微分不可能であるということは、関数 $g(x)$ のグラフは $x=2$ のところで図 5-7 の点 A のように切れているか、点 B のように飛び出ているか、あるいは点 C のように屈折していることが考えられる。

問 5.4：基礎概念確認

(1) $f'(x)=0$　　x の値に関わらず傾きが常に 0 ということは、水平なグラフを持つ定値関数である。しかし、どのような値をとる定値関数かはこの情報だけからは判断できない。

(2) $g'(x)=-1$　　x の値に関わらず傾きが常に -1 ということは、傾きが -1 の直線グラフを持つ一次関数であることがわかる。式で書けば $g(x)=-x+c$。導関数は傾きの情報しか表わしていないので、切片 c まではわからない。

(3) $h'(x)=2x$　例題 5.4 で学んだように、2 次関数 x^2 の導関数は $2x$ となる。(2)と同じく、導関数は傾きの情報だけを反映したもので、グラフの水平位置に関する情報は含んでいない。つまり、2 次関数 x^2 を上下に平行移動した関数は全て導関数が $2x$ になる。式で書けば $h(x)=x^2+c$。

解説：この問題では、導関数の傾き情報から元の関数グラフを想像するという微分と逆の発想をすることが要求されます。この発想法は積分の概念と密接に関係する非常に重要なものです。傾きがわかるだけでは、元の関数の形はわかっても位置までは特定できない。このことを確認することがねらいです。

問 5.5：基礎概念確認

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

解説：本書では導関数の定義式として上の式を採用しました。h は微小変化を表す変数で、ε や Δx などの違う文字表記に置き換えても問題ありません。また、h のような微小変化を使う代わりに $x+h=v$ とすると、$h=v-x$ かつ、$h\to 0$ のとき $v\to x$ となるから、定義式は次のように書き換えられます。

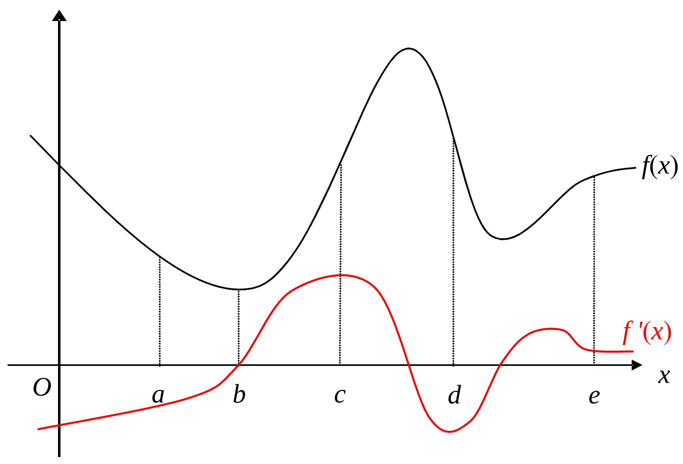
$$f'(x)=\lim_{v\to x}\frac{f(v)-f(x)}{v-x}$$

このような定義式も、もちろん正解です。

問 5.6：基礎概念確認

(1)　x の５つの値(a, b, c, d, e)を微分係数の大きいものから順に並べると、c, e, b, a, d となる。

(2)　描かれた区間における導関数グラフのおおよその形は下図の通り。



問 5.7：基礎概念確認

導関数のグラフもほぼ元の関数のグラフと同じになる。

解説：問 5.6 のような練習をした後で、この問題に挑戦すると指数関数の導関数もやはり元の指数関数のように単調な曲線になることがわかるはずです。定規などを使って、正確に傾きを調べてみましょう。手で調べるので正確に同じグラフになるとまでは言えなくても問題ありません。傾きが単調に大きくなっていることだけでも確かめられれば十分です。指数関数がそういう特別な性質を持つ関数であることを作業を通じて記憶に刻みつけることが大事です。

問 5.8：定義式による導関数の導出

極限を使った定義式に従って以下を求めなさい。

(1)　$y = x^2$ の x=2 における微分係数

定義より微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

(2)　$y = x^3$ の導関数

定義より導関数は

$$\{x^3\}'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

(3)　$y = 1/x$ の導関数

定義より導関数は

$$\{1/x\}'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}\right]=\lim_{h\to 0}\left[-\frac{1}{(x+h)x}\right]=-\frac{1}{x^2}$$

問 5.9：応用問題

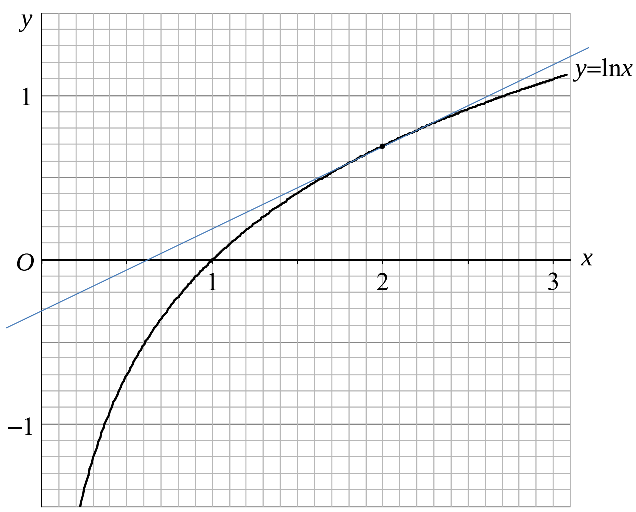
自然対数関数 $y = \ln x$ の x＝2 における微分係数は 1/2 である。以下の問いに答えなさい。ただし ln2 はおよそ 0.693 である。

(1)　x＝2.01 のときの関数の値 ln2.01 はおよそいくつか。

解）微分係数は「独立変数 x が微小に増加するとき、関数の値 y がその何倍増加するか」を示している。今、x が微小に 0.01 増加したので、関数の値 y はその微分係数倍、すなわち 1/2 倍だけ増加するから、次のような近似計算ができる。

$$\ln 2.01 \approx \ln 2 + 0.01\times(1/2) = 0.693 + 0.005 = 0.698$$

(2)　図の直線は点（2, ln2）における関数 $y = \ln x$ の接線である。接線の y 切片はおよそいくつか。



解）接線は点（2, ln2）を通り、その傾きは 1/2 だから、接線の方程式は

$$y-\ln 2=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$\rightarrow y=\frac{1}{2}x-1+\ln 2\approx\frac{1}{2}x-1+0.693=\frac{1}{2}x-0.307$$

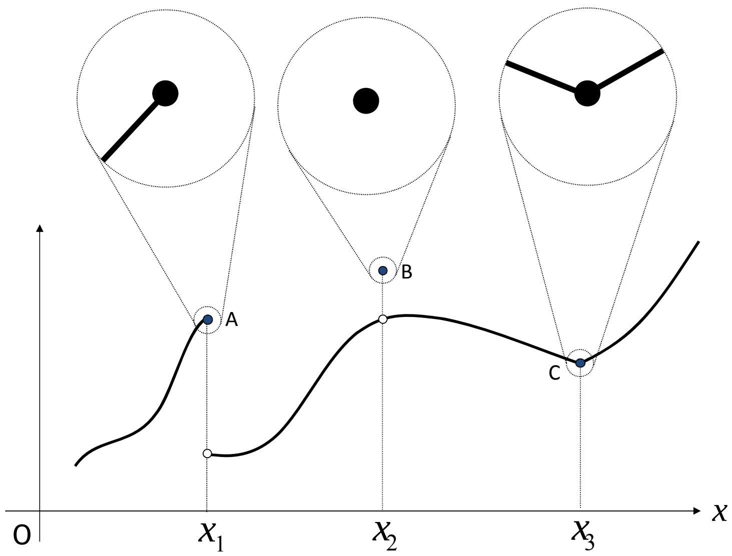
よって接線の y 切片はおよそ -0.307。

問 5.10：発展問題

関数が連続でない点や屈折している点においては微分ができない（＝接線の傾きが定められない）。厳密な定義に従えば、それは極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在しないことを意味する。**図 5-7** の 3 つの点 x_1, x_2, x_3 では極限が存在しないが、どのような理由で極限が存在しないのかを明らかにせよ。



解）**図 5-7** のグラフは上図の通り。

点 x_1 では、h を 0 に近づけるときに、右から（つまりプラスの値を取りながら）0 に近づけると極限がマイナス無限大に発散してしまう。

点 x_2 では、h を 0 に近づけるときに、右から（つまり h がプラスの値を取りながら）0 に近づけると極限がマイナス無限大に発散し、逆に左から（つまり h がマイナスの値を取りながら）0 に近づけると極限がプラス無限大に発散してしまう。いずれにしても極限はない。

点 x_3 では、h を 0 に近づけるときに、右から（つまり h がプラスの値を取りながら）0 に近づけると極限がマイナスの有限値に収束し、逆に左から（つまり h がマイナスの値を取りながら）0 に近づけると極限がプラスの有限値に収束する。発散することはないが、近づけ方によって収束値が異なるため極限はない。

問 5.11：発展問題

次の性質を証明してみよう。

指数関数の性質

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

＊ヒント：自然対数の底 e に関する定義式を使います。

なかなか思いつけないと思いますが簡潔な証明法をまず紹介します。

証明Ａ）まず、分子の部分の逆数を x とおく。つまり、

$$x=\frac{1}{e^h-1}$$ あるいは同じことだが、 $$\frac{1}{x}=e^h-1$$

とする。これを書き変えると、

$$e^h=1+\frac{1}{x}$$

となり、両辺の自然対数をとると

$$h=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

となる（$\ln e^h=h\times\ln e=h\times 1=h$ となることに注意）。

以上に注意して、極限をとる h の式を x を使って書き換えると、

$$\frac{e^h-1}{h}=\frac{1}{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

となり、分母の部分に e の定義でおなじみの形が現れる。

さて、h が 0 に近づくとき、x は発散するのだが、発散の仕方が一様ではないので場合分けをする。

h は 0 以外の実数であるが、h を右から（つまりプラスの値を取りながら）0 に近づける場合、x はプラス無限大に発散するので、

$$\lim_{h\to 0+}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]}=\frac{1}{\ln e}=1$$

注　$h\to 0+$は h を右から 0 に近づけることを意味する。

逆に、h を左から（つまりマイナスの値を取りながら）0 に近づける場合、x はマイナス無限大に発散するので、やはり

$$\lim_{h\to 0-}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{\ln\left[\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]}=\frac{1}{\ln e}=1$$

注　$h\to 0-$は h を左から 0 に近づけることを意味する。

となる（x がマイナス無限大に発散する場合にも[・]部分が e に収束することは第 4 章章末問題 問 4.8(3)で証明済み）。よって、h をどのように 0 に近づけても 1 に収束する。

証明終わり

解説：上の解法の特徴は変数を置き換えて、極限の式を大胆に書き換えているところです。普通に極限を求めようとしてうまくいかない場合はこの方法によって状況を打開できることがあります。例として次の公式を変数変換によって証明してみましょう。

自然対数の底 e の公式	$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

証明）まず、x の逆数を y とおく。つまり、

$y=\dfrac{1}{x}$　　　　あるいは同じことだが、$x=\dfrac{1}{y}$

とする。極限をとる x の式を y を使って書き換えると、

$$(1+x)^{1/x}=\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}$$

となり、e の定義でおなじみの形となる。

さて、x が 0 に近づくとき、y は発散するのだが、やはり発散の仕方が一様ではないので場合分けをする。

x は 0 以外の実数であるが、x を右から（つまりプラスの値を取りながら）0 に近づける場合、y はプラス無限大に発散するので、

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{1/x}=\lim_{y\to +\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$$

注　$x\to 0+$は x を右から 0 に近づけることを意味する。

逆に、x を左から（つまりマイナスの値を取りながら）0 に近づける場合、y はマイナス無限大に発散するので、やはり

$$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{1/x}=\lim_{y\to -\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$$

注　$h\to 0-$は h を左から 0 に近づけることを意味する。

となる（y がマイナス無限大に発散する場合にも[・]部分が e に収束することは第 4 章章末問題 問 4.8(3)で証明済み）。よって、x をどのように 0 に近づけても e に収束することが示された。

証明終わり

さて、証明Ａでは「分子の部分の逆数を x とおく」という発想が決定的に重要ですが、逆数なんてなかなか思いつけないでしょう。

でも変数を置き換えるという工夫さえ知っていれば、「分子の部分を x とおく」という程度なら思いつけるかもしれません。実は、これでも今証明した自然対数の底 e の公式を使えば、証明ができます。それが証明Ｂです。

証明Ｂ）まず、分子の部分を x とおく。つまり、

$$x = e^h - 1$$

とする。

$$e^h = 1 + x$$

となり、両辺の自然対数をとると

$$h = \ln(1 + x)$$

となる（$\ln e^h = h \times \ln e = h \times 1 = h$ となることに注意）。

以上に注意して、極限をとる h の式を x を使って書き換えると、

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\ln(1 + x)^{1/x}}$$

となる。

さて、h が 0 に近づくとき、x も 0 に限りなく近づくので、

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(1 + x)^{1/x}} = \frac{1}{\ln\left[\lim_{x \to 0}(1 + x)^{1/x}\right]} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

よって、極限は１である。

証明終わり