第 6 章　章末問題の解答

問 6.1：計算問題

(1) $f(x) = -5 \quad \to \quad f'(x) = 0$

解説：定値関数は水平な直線グラフなので、その傾きは常に 0 となります。

(2) $f(x) = x^{-n} \quad \to \quad f'(x) = -n\,x^{-n-1} = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

解説：べき乗則を適用します。

(3) $y = x^2 - 2x \quad \to \quad y' = 2\,x - 2 = 2(x-1)$

解説：べき乗則を適用します。

(4) $y = 2x^3 - 3x + 1 \quad \to \quad y' = 6\,x^2 - 3 = 3(2x^2 - 1)$

解説：べき乗則を適用します。

(5) $g(t) = (a-t)(b-t) \quad \to \quad g'(t) = (-1)\times(b-t) + (a-t)\times(-1) = 2t - a - b$

解説：積の微分の公式を適用します。変数の名前が x ではなく t となっていますが、計算は同じです。動揺しないようにしましょう。

(6) $H(t) = vt - \dfrac{1}{2}gt^2 \quad \to \quad H'(t) = v - gt$

解説：この式の H は初速 v で打ち上げられた物質の t 秒後の高さを表しています。それを微分した H' は t 秒後の速度です。

(7) $F(x) = x(x^2 - 4) \quad \to \quad F'(x) = 1\cdot(x^2-4) + x\cdot(2x) = 3x^2 - 4$

解説：積の微分の公式を適用します。

(8) $y = (2x+1)\ln x \quad \to \quad y' = 2\cdot\ln x + (2x+1)\cdot\dfrac{1}{x} = 2 + \dfrac{1}{x} + 2\ln x$

解説：積の微分の公式を適用します。対数関数は微分すると逆数 $1/x$ になります。

(9) $y = \dfrac{x}{3e^x + 1} \quad \to \quad y' = \dfrac{1\cdot(3e^x+1) - x\cdot 3e^x}{(3e^x+1)^2} = \dfrac{3e^x(1-x)+1}{(3e^x+1)^2}$

解説：商の微分の公式を適用します。指数関数は微分をしても形が変わらないので注意しましょう。

(10)　$y = \dfrac{e^x}{x^2+1} \quad \to \quad y' = \dfrac{e^x(x^2+1) - e^x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$

解説：商の微分の公式を適用します。指数関数は微分をしても形が変わらないので注意しましょう。

(11)　$y = 3\ln x + 2 \quad \to \quad y' = \dfrac{3}{x}$

解説：対数関数は微分すると逆数 $1/x$ になります。

(12) (13) (14) は指数法則と対数の性質に注意して与式を変形し、それから微分します。

(12) $y = e^{2x+1} = e^{2x} \cdot e^1 = e \cdot (e^x)^2 = e \cdot e^x \cdot e^x = (e \cdot e^x) \times e^x$

→ $y' = (e \cdot e^x)' \times e^x + (e \cdot e^x) \times (e^x)' = e \cdot e^x \times e^x + e \cdot e^x \times e^x = 2e \cdot e^x \times e^x = 2e^{1+x+x} = 2e^{2x+1}$

解説：指数関数より与式は２つの指数関数の積と考えることができますので、積の微分の公式に当てはめます。指数関数は微分しても形が変わらないので、計算結果はとてもシンプルになります。

(13) $y = \ln x^x = x \cdot \ln x \quad \rightarrow \quad y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

解説：積の微分の公式を適用します。対数関数は微分すると逆数 $1/x$ になります。

(14) $y = \ln \dfrac{3}{x} = \ln 3 - \ln x \quad \rightarrow \quad y' = -\dfrac{1}{x}$

解説：ln3 は定数ですので微分すると 0 になります。

問 6.2：計算問題

問 6.1 の結果に与えられた独立変数の値を代入すればよい。

(5) $g'(0) = 2 \cdot 0 - a - b = -(a+b)$

(6) $H'\left(\dfrac{v}{g}\right) = v - g\dfrac{v}{g} = v - v = 0$

解説：H' は初速 v で打ち上げられた物質の t 秒後の速度ですから、v/g 秒後に物質の速度が 0 になって、この時点で上昇から下降に運動が変わり、同時に物質の高さ H が最高になることがわかります。物理への応用です。

(7) $F'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8$

問 6.3： 応用問題

接線の傾きはそれぞれの関数の微分係数であり、それは導関数の値である。

点 A は関数 $y = x^2$の $x = -2$ における点。導関数は $y' = 2x$ なので接線の傾きは $2(-2) = -4$。

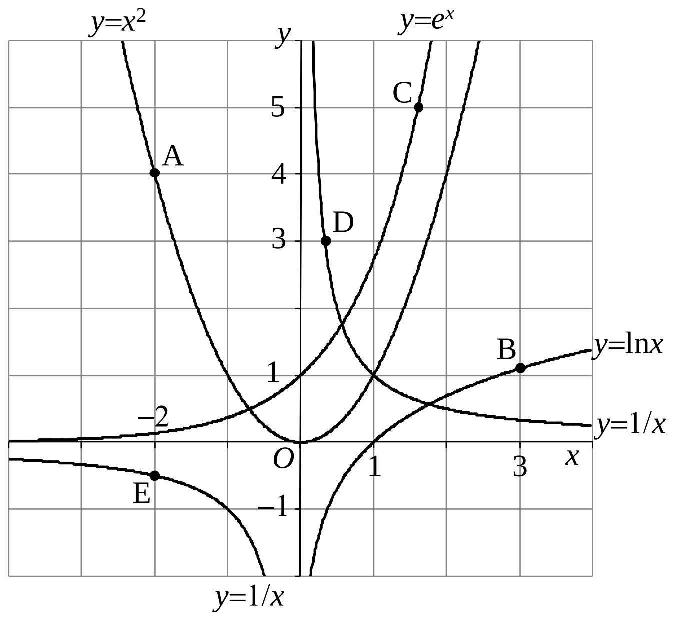
点 B は関数 $y = \ln x$ の $x = 3$ における点。導関数は $y' = 1/x$ なので接線の傾きは 1/3。

点 C は関数 $y = e^x$の $y = 5$ における点。指数関数の導関数は元の関数と一致する、つまり、$y = y' = e^x$なので、関数の値が $y = 5$ のときは、導関数の値も同じ値で $y' = 5$。つまり接線の傾きは 5。

点 D は関数 $y = 1/x$ の $y = 3$ つまり $x = 1/3$ における点。導関数は $y' = -1/x^2$なので接線の傾きは -9。

点 E は関数 $y = 1/x$ の $x = -2$ における点。導関数は $y' = -1/x^2$なので接線の傾きは $-1/4$。

解説：実際に接線の傾きを調べて結果が正しいか確認してみましょう。点 C だけが特殊なので難しいと思う人が多いかもしれません。指数関数 $y = e^x$は微分しても形が変わりません。これは元の関数の値と導関数の値が一致することを意味しています。つまり、元の関数の値が 5 のときには、導関数の値（接線の傾き）も 5 なのです。



問 6.4：応用問題

球の体積 V を半径 r の関数式で表すと

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

となる（わからない人は高校数学の本、またはインターネットで調べてみましょう）。

これを微分すると

$$V' = 4\pi \cdot r^2$$

とる。

さて、この右辺は球の表面積の公式を表している。

なぜこのような結果になるかを考察してみよう。導関数の値は微分係数であり、その意味は「独立変数 r が微小に増加するときに関数の値 V がその何倍増加するか」を表している。実際に半径 r が微小に Δr だけ増加するときに体積がどれだけ増加するかをイメージしてみよう。半径が大きくなると、球が一回り大きくなるわけだが、その増加した部分を球から剥がして平らに延ばしたらどうなるだろう。厚さが Δr の膜のようなものが広がるのが想像できるだろう。膜の面積は球の表面積とほぼ一致するはずだから、体積の増加分はおよそ表面積×Δr となることがわかる。つまり、球の体積の微分係数＝球の表面積となるのである。

問 6.5：応用問題

1000 戸の住宅からなる集合住宅で 1 か月当たり 100 万円の防犯対策を新たに導入することになった。費用は全住宅で均等割りすることとなり、100 万円/1000 戸で各住宅の負担は現在 1000 円／月である。来月から新たに 7 戸増えて、1007 戸になると 1 か月当たりの負担はどのように変化するか。

(1)　公式(4)の考え方を応用して、負担の変化を予想してみよう。

解）戸数を x とするときの各住宅の負担 y 円／月とすると、

$$y = 1000000 / x$$

となる。これを微分すると公式(4)より

$$y' = -1000000/x^2$$

となる。さて、$x =$ 1000 戸のとき、微分係数は

$$y' = -1000000/1000^2 = -1000000/1000000 = -1$$

となる。これは個数が 1000 戸の状態から個数が微小に増加するとき、1 戸当たりの負担はその 1 倍減少することを意味している。この問題では個数が 7 戸増加するので、負担はその 1 倍の 7 円減少して、993 円／月になると予想される。

(2)　実際の負担額は 100 万円/1007 戸となる。計算機等を使ってこれを求め、(1)の結果と比較してみよう。
解）電卓で計算すると、100 万円/1007 = 993.04865 となる。(1)の予想よりも約 0.05 円多くなる。

(3)　(1)と(2)に誤差が出るのはなぜか考えてみよう。
解）(1)の解法は 7 人の増加を微小な変化と考えて求めているので、厳密な負担の変化とは若干の誤差が生じている。

解説 : 1000 人の住民が全員 1000 円を負担している状況で、追加的に 1 人が入ってくるとその人にも 1000 円程度の負担をしてもらうことができるわけだから、元々いた 1000 人の負担を約 1 円減らすことができることがわかりますね。独立変数の変化が微小であると判断される場合には、微分を使うことで関数の値の変化が比較的簡単に予想できることを理解してください。現実問題として 0.05 円程度の差は無視されるので、実用に耐える予想が得られていると考えられます。