第 7 章　章末問題の解答

問 7. 1：合成関数の微分

慣れないうちは関数を２つの関数に分解してから、合成関数の微分の公式を使うのが安全です。

(1)　$y=(x^2+3x+1)^3$ を２つの関数 $y=u^3$,　$u=x^2+3x+1$ に分解して、微分すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\cdot(2x+3)=3(x^2+3x+1)^2\cdot(2x+3)$$

$x=-1$ における微分係数：　$\frac{dy}{dx}=3[(-1)^2+3(-1)+1]^2\cdot[2(-1)+3]=3$

テキスト p. 327 の略解で導関数が $3(2x+3)(x^2+3x+1)$、微分係数が-3 となっていますが、それぞれ $3(2x+3)(x^2+3x+1)^2$、3 の誤りです。お詫びして訂正します。

(2)　$y=e^{x^2+1}$　を２つの関数 $y=e^u$,　$u=x^2+1$ に分解して、微分すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\cdot(2x)=2x\cdot e^{x^2+1}$$

$x=1$ における微分係数：　$\frac{dy}{dx}=2\cdot1\cdot e^{1^2+1}=2e^2$

(3)　$y=\sqrt{\frac{2-x}{3x+4}}$　を２つの関数 $y=u^{1/2}$,　$u=\frac{2-x}{3x+4}$ に分解して、微分すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}u^{-1/2}\cdot\frac{-1\cdot(3x+4)-(2-x)\cdot3}{(3x+4)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{3x+4}\right)^{-1/2}\cdot\frac{-10}{(3x+4)^2}=-5\cdot(2-x)^{-1/2}\cdot(3x+4)^{-3/2}$$

$x=0$ における微分係数：　$\frac{dy}{dx}=-5\cdot2^{-1/2}\cdot4^{-3/2}=-5\cdot2^{-1/2}\cdot2^{-3}=-5\cdot2^{-4+(1/2)}=-\frac{5\sqrt{2}}{16}$

(4)　$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}$　を２つの関数 $y=u^{-1/2}$,　$u=x^2+4x+5$ に分解して、微分すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2}u^{-3/2}\cdot(2x+4)=-\frac{1}{2}(x^2+4x+5)^{-3/2}\cdot(2x+4)=-(x+2)(x^2+4x+5)^{-3/2}$$

$x=-1$ における微分係数：　$\frac{dy}{dx}=-(-1+2)[(-1)^2+4(-1)+5]^{-3/2}=-2^{-3/2}$

問 7. 2：対数微分法

対数微分法を使って以下の関数の導関数を求めよ。

(1)　　$y=2^x$

解)　$f(x)=2^x$ とおいて、両辺の自然対数を取る。

$\ln f(x)=\ln 2^x=x\cdot\ln 2$

両辺を微分すると、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln 2$$

よって、

$$f'(x) = f(x) \cdot \ln 2 = 2^x \cdot \ln 2$$

(2)　　　$y = x^{2x}$　　　　　$x > 0$

解）$f(x) = x^{2x}$ とおいて、両辺の自然対数を取る。

$$\ln f(x) = \ln x^{2x} = 2x \cdot \ln x$$

両辺を微分すると、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2(1 + \ln x)$$

よって、

$$f'(x) = f(x) \cdot 2(1 + \ln x) = x^{2x} \cdot 2(1 + \ln x) = 2(1 + \ln x)x^{2x}$$

(3)　　　$y = (x+1)^{-3x+1}$　　　$x > -1$

解）$f(x) = (x+1)^{-3x+1}$ とおいて、両辺の自然対数を取る。

$$\ln f(x) = \ln(x+1)^{-3x+1} = (-3x+1) \cdot \ln(x+1)$$

両辺を微分すると、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -3 \cdot \ln(x+1) + (-3x+1) \cdot \frac{1}{x+1} = -3\ln(x+1) - \frac{3x-1}{x+1}$$

よって、

$$f'(x) = f(x) \cdot \left[-3\ln(x+1) - \frac{3x-1}{x+1}\right] = (x+1)^{-3x+1} \cdot \left[-3\ln(x+1) - \frac{3x-1}{x+1}\right]$$

$$= (x+1)^{-3x}\left[-3x + 1 - 3(x+1)\ln(x+1)\right]$$

(4)　　　$y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$　　　$x > 0$

解）$f(x) = (1 + x^{-1})^x$ とおいて、両辺の自然対数を取る。

$$\ln f(x) = \ln(1 + x^{-1})^x = x \cdot \ln(1 + x^{-1})$$

両辺を微分する前に、$\ln(1 + x^{-1})$ を微分するとどうなるかを調べておこう。

$v = \ln(1 + x^{-1})$ とおいて、これを２つの関数 $v = \ln u,\quad u = 1 + x^{-1}$ に分解して、微分すると

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (-x^{-2}) = -\frac{1}{x^2(1 + x^{-1})} = -\frac{1}{x^2 + x}$$

となる。

　準備ができたので対数微分法を使うと、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \ln(1 + x^{-1}) + x \cdot \left(-\frac{1}{x^2 + x}\right) = \ln(1 + x^{-1}) - \frac{1}{x+1}$$

よって、

$$f'(x)=f(x)\cdot\left[\ln(1+x^{-1})-\frac{1}{x+1}\right]=(1+x^{-1})^{x}\cdot\left[\ln(1+x^{-1})-\frac{1}{x+1}\right]$$

発展：(4)の関数が単調増加であることを確かめよう。

証明）(4)の結果より、

$$f'(x)=f(x)\cdot\left[\ln(1+x^{-1})-\frac{1}{x+1}\right]$$

であるが、これが全ての正の x に対して常に正であることを証明すればよい。

x が正のとき、$f(x)$は常に正だから、[・]の部分が正であることを示す。この部分を書き換えると

$$\ln(1+x^{-1})-\frac{1}{x+1}=\ln(1+x^{-1})-\frac{1}{x+1}\ln e=\ln(1+x^{-1})+\ln e^{-\frac{1}{x+1}}=\ln\left[(1+x^{-1})e^{-\frac{1}{x+1}}\right]$$

となる。これが正になるための必要十分条件は対数の真数が 1 より大きいことである。

真数部分を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\left[(1+x^{-1})e^{-\frac{1}{x+1}}\right]=-x^{-2}e^{-\frac{1}{x+1}}+(1+x^{-1})e^{-\frac{1}{x+1}}\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=e^{-\frac{1}{x+1}}\left[-\frac{1}{x^2}+\frac{1+x^{-1}}{(x+1)^2}\right]$$

$$=e^{-\frac{1}{x+1}}\left[\frac{-(x+1)^2+x^2+x}{x^2(x+1)^2}\right]$$

$$=e^{-\frac{1}{x+1}}\left[\frac{-x-1}{x^2(x+1)^2}\right]<0$$　　（ $x>0$ であることより）

となり、真数部分は x の単調減少関数であることがわかる。真数部分の $x\to\infty$ の極限は

$$\lim_{x\to\infty}\left[(1+x^{-1})e^{-\frac{1}{x+1}}\right]=(1+0)e^{-0}=1$$

であるから、x の増加とともに真数部分はどんどん小さくなるが、1 より小さくなることはない。つまり、すべての正の x に対して真数部分は 1 より大きい。よって、

$$f'(x)=f(x)\cdot\left[\ln(1+x^{-1})-\frac{1}{x+1}\right]>0$$

が示された。

証明終わり

問 7.3：逆関数の微分

逆関数の微分の公式と$\{e^x\}'=e^x$を利用して、以下を証明せよ。

$$\{\ln x\}'=\frac{1}{x}$$

証明） $y=\ln x$とおくと、この対数関数の逆関数は指数関数$x=e^y$である。

逆関数の微分の公式より、

$$\{\ln x\}'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}=\frac{1}{\{e^y\}'}$$

ここで$\{e^y\}'$は指数関数$x=e^y$のyに関する微分である。指数関数の微分の公式（$\{e^x\}'=e^x$）より、

$$:=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$$

となる（yは解答のために導入した変数なので、最終的にはxの式に戻す）。

証明終わり

問 7.4：発展問題

本章で紹介した以下の２つの公式を証明せよ。

$$\{g(f(x))\}'=g'(f(x))\cdot f'(x)$$ 合成関数の微分の公式

$$\{f^{-1}(y)\}'=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$ 逆関数の微分の公式

(1) 合成成関数の微分の公式の証明

解説：導関数の定義式より

$$\{g(f(x))\}'=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

として、hをゼロに近づけるとき最初の分数はg'に近づき、２つめの分数はf'に近づき、2 つめの分数はf'に近づくと予想されるので全体として、導関数の積に$g'\cdot f'$に収束すると予想されます。公式の直感的な理解としてはこれで問題ありませんが、厳密な証明方法としてはこれには致命的な問題があります。それは 0 でないhに対しても最初の分数の分母が 0 となる可能性があり、その場合にはそもそも最初の分数の値が定義できないということです。定義できないものの極限なんて取れませんから、この証明方法は厳密には使えません。

そこで次の事実に注目します。関数$z=g(y)$の独立変数yの値をある値に固定して考えます。導関数g'の定義式は

$$g'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}$$

ですが、Δyの値が 0 でなければ極限を取る関数の値と極限値は必ずしも一致しません。その差をεとすると、εはΔyの関数で

$$\varepsilon(\Delta y)=\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}-g'(y)$$ ※

となり、必ず

$$\lim_{\Delta y\to 0}\varepsilon(\Delta y)=0$$

となります。※式を書き換えると、任意のΔyに対して

$$g(y+\Delta y)-g(y)=g'(y)\Delta y+\varepsilon(\Delta y)\cdot\Delta y \quad \text{かつ} \quad \lim_{\Delta y\to 0}\varepsilon(\Delta y)=0$$

が成り立つと言えます。ここで今回の証明では、変化前と変化後のyの値がそれぞれ

変化前： $f(x)$

変化後： $f(x+h)$

なので、対応する変化Δyは

$$\Delta y=f(x+h)-f(x)$$

となります。hが 0 に収束するとき、Δyも 0 に収束するので、次のことが言えます。

任意のhに対して

$$g(f(x+h))-g(f(x))=g'(f(x))\cdot[f(x+h)-f(x)]+\varepsilon(h)\cdot[f(x+h)-f(x)] \quad \text{かつ} \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

が成り立つ。この事実を使えば、「分数の値が定義できない」という厄介な問題を避けることができます。以下に証明を見ていきましょう。

証明）導関数の定義式より

$$\{g(f(x))\}'=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}$$

となる。議論を単純にするためにxの値は固定して考える。関数gが独立変数の値$y=f(x)$において微分可能であるならば、極限の分母を

$$g(f(x+h))-g(f(x))=g'(f(x))\cdot[f(x+h)-f(x)]+\varepsilon(h)\cdot[f(x+h)-f(x)]$$

と書き換えるとき、

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

が成り立つ（上の解説で述べた通り）。これを定義式に代入して整理すると、

$$\begin{aligned}\{g(f(x))\}'&=\lim_{h\to 0}\frac{g'(f(x))\cdot[f(x+h)-f(x)]+\varepsilon(h)\cdot[f(x+h)-f(x)]}{h}\\&=g'(f(x))\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=g'(f(x))\cdot f'(x)+0\cdot f'(x)\\&=g'(f(x))\cdot f'(x)\end{aligned}$$

証明終わり

(2) 逆関数の微分の公式の証明

証明）逆関数が存在することより、関数fおよびその逆関数f^{-1}は厳密な単調関数である。

導関数の定義式より

$$\{f^{-1}(y)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}{h}$$

となる。ここで変化前の逆関数の値を $x = f^{-1}(y)$、y の値が h だけ増加したときの関数の値 x の変化を

$$\Delta x = f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)$$

とすると、変化後の逆関数の値は、

$$f^{-1}(y+h) = \Delta x + f^{-1}(y) = x + \Delta x$$

となる。ここで逆関数の関係より

$$y + h = f(x+\Delta x)$$

となるから、y の値の変化は

$$h = f(x+\Delta x) - y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

となる。以上に注意して、定義式を x の式に書き換えると

$$\{f^{-1}(y)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)}$$

ここで f^{-1} は厳密な単調増加関数なので、h が 0 でないとき、Δx も 0 ではないので、

$$:= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

さらに、$h\to 0$ のとき、$\Delta x\to 0$ となるので、

$$:= \frac{1}{\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \because x = f^{-1}(y)$$

となる。

証明終わり

解説：逆関数の対応関係と元の関数の対応関係は次のようになっている。定義式の y と h を使った表現を x と Δx を使った表現に置き換えて整理していけばよい。