第 8 章　章末問題の解答

問 8.1：高階導関数と関数の多項式近似

解説：高階導関数の多様な表現に慣れてもらうために、以下の解答では $f^{(n)}(x)$ではなく、$d^n f(x)/dx^n$ の表記を使って高階導関数を表現しました。

次の関数について以下の問いに答えよ。

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{定義域} \quad -1 < x < 1$$

(1)　関数 f の１階、２階、３階の導関数をそれぞれ求めよ。

解）導関数は以下の通り、

1 階：
$$\frac{df(x)}{dx} = \{(1-x)^{-1}\}' = -(1-x)^{-2} \times (-1) = (1-x)^{-2}$$

２階：
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \{(1-x)^{-2}\}' = -2 \cdot (1-x)^{-3} \times (-1) = 2(1-x)^{-3}$$

３階：
$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \{2(1-x)^{-3}\}' = -3 \cdot 2(1-x)^{-3} \times (-1) = 6(1-x)^{-4}$$

(2)　$x＝0$ における関数 f の１階、２階、３階の微分係数をそれぞれ求めよ。

解）$x＝0$ における微分係数はそれぞれの導関数に $x＝0$ を代入すればよいから、

1 階：
$$\frac{df(0)}{dx} = (1-0)^{-2} = 1$$

２階：
$$\frac{d^2 f(0)}{dx^2} = 2(1-0)^{-3} = 2$$

３階：
$$\frac{d^3 f(0)}{dx^3} = 6(1-0)^{-4} = 6$$

(3)　$x＝0$ における関数 f の２次近似関数を求めよ。

解）関数 f の２次近似関数を g_2 とすると

$$g_2(x) = f(0) + \frac{df(0)}{dx}(x-0) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(0)}{dx^2}(x-0)^2$$

$$= (1-0)^{-1} + x + \frac{1}{2}2x^2 = 1 + x + x^2$$

〈以下は発展問題〉

(4)　関数 f の n 階の導関数を求めよ。

解）(1)と同様の方法で 4 階の導関数を求めると

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = 24(1-x)^{-5} = 4 \times 3 \times 2(1-x)^{-5} = 4! \times (1-x)^{-5}$$

となり、一般に n 階の導関数は

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = n\times(n-1)\times\cdots\times 4\times 3\times 2(1-x)^{-(n+1)} = n!\times(1-x)^{-(n+1)}$$

となることが予想される。この予想が正しいことを数学的帰納法で証明する。

まず、予想が $n=k$ のときに成立すると仮定する。

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k} = k!\times(1-x)^{-(k+1)}$$

さて、このとき$(k+1)$階の導関数は

$$\frac{d^{k+1} f(x)}{dx^{k+1}} = \{k!\times(1-x)^{-(k+1)}\}' = -(k+1)\times k!\times(1-x)^{-(k+1)-1}\times(-1)$$

$$= (k+1)\times k\times(k-1)\times\cdots\times 4\times 3\times 2(1-x)^{-(k+2)} = (k+1)!\times(1-x)^{-[(k+1)+1]}$$

となる。よって、予想が $n=k$ のときに成立するならば、$n= k+1$ のときにも成立する。

すでに $n=1,2,3,4$ で成り立つことは確認されているので、数学的帰納法により予想は全ての自然数 n について成り立つことが証明された。よって、関数 f の n 階の導関数は

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = n!\times(1-x)^{-(n+1)}$$

(5)　$x=0$ における関数 f の n 階の微分係数を求めよ。

解）$x=0$ における微分係数は導関数に $x=0$ を代入すればよいから、

$$\frac{d^n f(0)}{dx^n} = n!\times(1-0)^{-(n+1)} = n!$$

(6)　関数 f を $x=0$ において Taylor 展開せよ。

解）$x=0$ における関数 f の Taylor 展開は

$$f(x) = f(0) + \frac{df(0)}{dx}(x-0) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(0)}{dx^2}(x-0)^2 + \frac{1}{3\cdot 2}\frac{d^3 f(0)}{dx^3}(x-0)^3 + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}\frac{d^4 f(0)}{dx^4}(x-0)^4 + \cdots$$

$$= f(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\frac{d^k f(0)}{dx^k}x^k\right)$$

ここで(5)の結果より

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\cdot k!\cdot x^k\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

となる。

解説）(6)の結果より、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \qquad ただし、-1 < x < 1$$

という関係が導かれました。この式どこかで見た覚えはありませんか？右辺は公比が１より小さい無限等比数列の和ですね。そうです。私たちはすでに第２章で右辺の無限等比数列の和の公式としてこの式を学んでいます。そこでは右辺から左辺を導くことでこの公式を示したのですが、この問題ではその逆、左辺から右辺を導いたことになります。

本書ではTaylor展開の証明は省略しましたが､既に証明済みの公式がTaylor展開によって導かれたことで､Taylor展開が正しいこと、すなわち関数を無限個の関数の和に分解することができるという事実が実感としてわかるのではないかと思います。難しい概念ですが、是非納得して覚えて、そして使えるようになってほしいと思います。