第 9 章　章末問題の解答

問 9.1：計算練習問題

次の関数の最大値と最小値、および対応する x の値を求めよ。注意：存在しない場合もある。

(1) $f(x) = -x^3 - 10x^2 + 7x + 5$　　定義域　$-8 \leq x \leq 1$

解）**Step 1：**微分して導関数を求める。

$$f'(x) = -3x^2 - 20x + 7 = (-3x+1)(x+7)$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような x の値を探す。

$$(-3x+1)(x+7) = 0$$

となる x の値は 1/3 と-7。

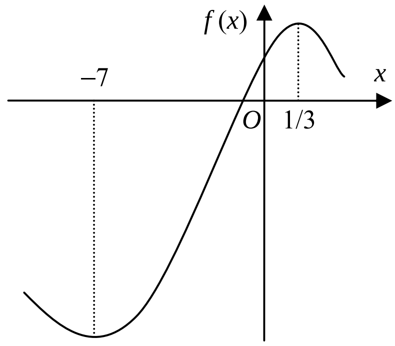
Step 3：Step 2 の x の値を頼りに増減表を書く。

注意深く増減表を書くと、下表のようになる。

x	-8	・・・	-7	・・・	1/3	・・・	1
$f'(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$f(x)$	-179	↘	-191	↗	167/27	↘	1

Step 4：グラフの大まかな形を描いて解を求める。

増減表よりグラフは右図のようになるから、解は以下の通り。



解　　最大解　167/27　（x=1/3 のとき）

　　　最小解　-191　（x= -7 のとき）

略解の最大解の値が間違っていました。訂正します。

(2) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 18}{x}$　　定義域　$1 \leq x \leq 8$

解）**Step 1：**微分して導関数を求める。

$$f'(x) = \frac{6x \cdot x - (3x^2 + 18) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^2 - 18}{x^2}$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような x の値を探す。

$$\frac{3x^2 - 18}{x^2} = 0$$

となるためには、分子が 0 にならなければならない。定義域の範囲内で分子を 0 にするような x の値は $\sqrt{6}$ 。

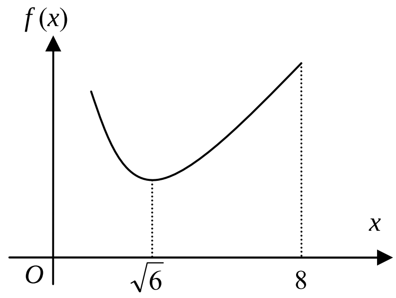
Step 3：Step 2 の x の値を頼りに増減表を書く。

注意深く増減表を書くと、下表のようになる。

x	1	・・・	$\sqrt{6}$	・・・	8
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	21	↘	$6\sqrt{6}$	↗	105/4

Step 4：グラフの大まかな形を描いて解を求める。

増減表よりグラフは右図のようになるから、解は以下の通り。



解　　　最大解　105/4　　（x= 8 のとき）　**端点解**

　　　　最小解　$6\sqrt{6}$　　（x= $\sqrt{6}$ のとき）

略解の最大解に対応する x の値が間違っていました。訂正します。

(3)　$f(x)=(x-3)^3(2x-1)^2$　　　定義域　$0 \le x \le 3$

解）**Step 1：**微分して導関数を求める。

$$f'(x)=3(x-3)^2\cdot(2x-1)^2+(x-3)^3\cdot 2(2x-1)\cdot 2$$
$$=(x-3)^2\cdot(2x-1)[3(2x-1)+4(x-3)]=5(x-3)^2\cdot(2x-1)\cdot(2x-3)$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような x の値を探す。

$$5(x-3)^2\cdot(2x-1)\cdot(2x-3)=0$$

となる x の値は 1/2 と 3/2 と 3 の 3 つ。

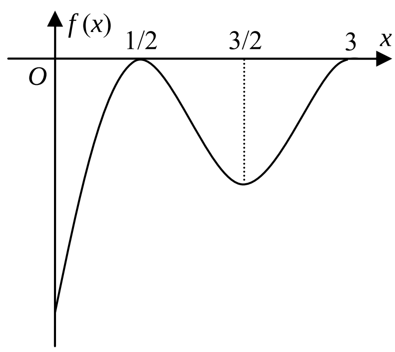
Step 3：Step 2 の x の値を頼りに増減表を書く。

注意深く増減表を書くと、下表のようになる。

x	0	・・・	1/2	・・・	3/2	・・・	3
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	-27	↗	0	↘	-27/2	↗	0

Step 4：グラフの大まかな形を描いて解を求める。

増減表よりグラフは右図のようになるから、解は以下の通り。



解　　　最大解　0　　　　（x=1/2 および 3 のとき）**3 は端点解**

　　　　最小解　-27　　　（x= 0 のとき）**端点解**

解説：Step 1 で積の微分の公式と合成関数の微分法を利用することで、展開せずに微分するのがコツです。導関数を因数分解された形で求めておけば、Step 2 の作業が簡単になります。

(4)　$f(x)=x\cdot\ln x$　　　　　定義域　$0 < x \le 3$

解）**Step 1：**微分して導関数を求める。

$$f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=1+\ln x$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような x の値を探す。

$$1+\ln x=0 \quad\to\quad \ln x=-1 \quad\to\quad \ln x=-1\cdot\ln e \quad\to\quad \ln x=\ln e^{-1}$$

つまり、導関数の値がゼロになるような x の値は e^{-1}、つまり $1/e$。e がおよそ 2.718 なので、$1/e$ はおよそ 0.368。

Step 3：Step 2 の x の値を頼りに増減表を書く。

$x=0$ が定義域に入っていないことに注意して増減表を書くと、下表のようになる。

x	0	・・・	$1/e$	・・・	3
$f'(x)$		-	0	+	+
$f(x)$		↘	$-1/e$	↗	$3\ln 3$

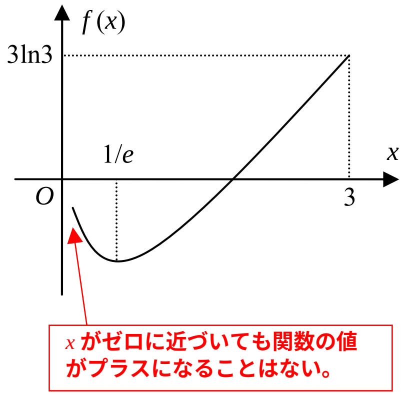
Step 4：グラフの大まかな形を描いて解を求める。

増減表からグラフがU字型になることがわかるが、問題は x が 0 に近づいたときに関数の値がどうなるかである。x が 0 に近づいたときに関数の値が $3\ln 3$ よりも大きくなれば最大値は存在しないことになるからである。

しかし、実際には x が 0 に近づいたときに、関数の値が $3\ln 3$ よりも大きくなることはない。これを確認する。

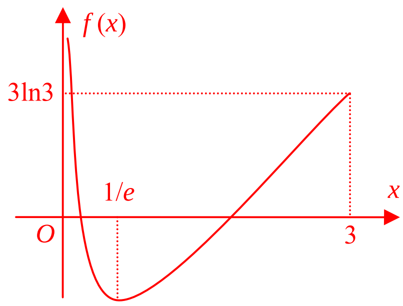
$\ln x$ は x の単調増加関数で、１以下ではマイナス、１以上ではプラスの値になる。したがって、x が１以下のときには $f(x) = x \cdot \ln x$ の値は常にマイナスであることから、x が 0 に近づいてもプラスにはならない。

以上よりグラフは右上図のようになるので、解は以下の通り。



解　　最大解　$3\ln 3$　　（$x=3$ のとき）**端点解**

　　　最小解　$-1/e$　　（$x=1/e$ のとき）



解説：もしも x が 0 に近づいたときに関数の値が $3\ln 3$ よりも大きくなるならばグラフは右の赤い図のようになります。このとき、$x=0$ で最大値をとると言いたいところですが、0 は定義域に含まれないので最大値はないと判定されます。

ちなみに x が 0 に近づいたときの関数の極限がわかればスッキリするのですが、残念ながら本書で紹介した知識では極限を求めることができません。この問題では極限がわからなくても解けるので必要ないのですが、興味ある読者のために、極限の導出法を簡単に紹介しておきましょう。

本書では紹介していませんが次の定理を使います。（証明は難解なので省略します。）

ロピタルの定理：　関数 $g(x)$ と関数 $h(x)$ が $x=a$ を除いたところでは微分可能であるとする。

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty,\quad \lim_{x\to a} h(x) = +\infty \quad \text{かつ} \quad h'(x) \neq 0$$

であるとき、極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{h'(x)} = c$ が存在するならば、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)} = c$ である。

さて、求める極限ですが定理に当てはまるように次のように書き換えます。

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(x\cdot\ln x) = \lim_{x\to 0+}\left(-\frac{-\ln x}{1/x}\right) = -\lim_{x\to 0+}\frac{-\ln x}{1/x}$$

（$x\to 0+$ は x をプラスからゼロに近づけることを意味します。）

ここで、$g(x) = -\ln x$，　$h(x) = 1/x$，　$a=0$ **と考えれば**

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = +\infty,\quad \lim_{x\to 0+} h(x) = +\infty \quad \text{かつ} \quad h'(x) = -1/x^2 < 0$$

であり、極限値 $\lim_{x\to 0+}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{-1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0+}x=0$ が存在するので、ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0+}\frac{-\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{h(x)}=0$$

よって、

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=-\lim_{x\to 0+}\frac{-\ln x}{1/x}=-0=0$$

となり、極限はゼロであることがわかります。ここで紹介したロピタルの定理には色々なバリエーションがあり、分数タイプの不定型の極限では分母と分子をそれぞれ微分してから極限を取ればよいことが証明されています。興味ある読者はインターネットで「ロピタルの定理」を検索して調べてみましょう。

(5) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$　　　定義域　$-2<x<2$

解）**Step 1：**微分して導関数を求める。

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような x の値を探す。

$$\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}=0$$

となるためには、分子が 0 でなければならない。定義域の範囲内で分子を 0 にするような x の値は 1 と−1。

Step 3：Step 2 の x の値を頼りに増減表を書く。

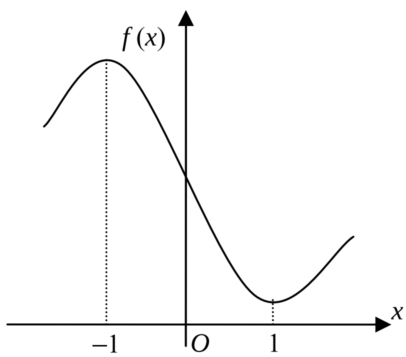
注意深く増減表を書くと、下表のようになる。

x	-2	・・・	-1	・・・	1	・・・	2
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	7/3	↗	3	↘	1/3	↗	3/7

端点が定義域に含まれないことに注意

Step 4：グラフの大まかな形を描いて解を求める。

増減表よりグラフは右図のようになるから、解は以下の通り。



解　　最大解　3　　（$x=-1$ のとき）

　　　最小解　1/3　　（$x=1$ のとき）

(6) $f(x)=x^2\left(1-\sqrt{x}\right)$　　　定義域　$0<x<2$

解）**Step 1：**微分して導関数を求める。べき乗則を使うために平方根を 1/2 乗としておくと計算しやすい。

$$f'(x)=2x\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)+x^2\left(-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right)=2x-2x^{1+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{2-\frac{1}{2}}=2x-\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=x\left(2-\frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような x の値を探す。

$$x\left(2-\frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)=0$$

定義域が 0 を含まないので、定義域の範囲内で分子を 0 にするような x の値は

$$x^{\frac{1}{2}}=\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad x=\frac{16}{25}$$

Step 3：Step 2 の x の値を頼りに増減表を書く。

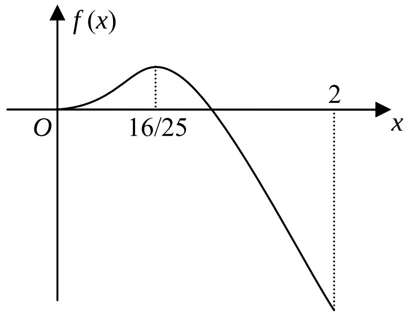
注意深く増減表を書くと、下表のようになる。

x	0	・・・	16/25	・・・	2
$f'(x)$	0	+	0	-	-
$f(x)$	7/3	↗	$4^4/5^5$	↘	$4(1-\sqrt{2})$

端点が定義域に含まれないことに注意

Step 4：グラフの大まかな形を描いて解を求める。

増減表よりグラフは右図のようになるから、解は以下の通り。



解　　最大解　$4^4/5^5$　　（x= 16/25のとき）

　　　最小解　存在しない

略解の最大値と最小値がともに間違っていました。訂正します。解説：$x=2$ は定義域に含まれないので最小値は存在しません。ただし、$4(1-\sqrt{2})$ に限りなく近い値を関数は取ります。このことを表現するのに数学では「最小値は存在しないが、下限は $4(1-\sqrt{2})$ である」と言います。

問題 9.2:応用問題

鉄板を加工して、容量が 1000π cm³（およそ 3.14 l）の小さなドラム缶（直円柱）を作る。下底と上蓋の鉄板は 1cm² 当り 1 円である。側面に使う鉄板は（曲げても折れない特殊な材質を使用するため）1cm² 当り 2 円である。ドラム缶の材料費を最小にするには、底面の直径をいくらにすればよいか？

解）ドラム缶（直円柱）の高さを h cm、底円の半径を r cm とする。ドラム缶の材料費を C 円とすると

C =（上蓋の面積　＋　底の面積）×　1 円　＋　側面の面積　×　2 円

となる。側面はまっすぐに伸ばすと長方形になるが、その一辺は高さ h cm に等しく、もう一方の辺の長さは底円の円周の長さと等しくなる。このことに注意すると、

$$C=(\pi r^2+\pi r^2)\times 1+(h\times 2\pi r)\times 2=2\pi(r^2+2hr)$$

となる。ここで鉄板の容量が 1000π cm³ だから、h と r は次の式を満たさなければならない。

$$\pi hr^2=1000\pi$$

$$\Rightarrow \quad h=1000/r^2$$

これを材料費 C の式に代入すると

$$C = 2\pi\left(r^2 + \frac{2000}{r}\right) = 2\pi\left(r^2 + 2000r^{-1}\right)$$

これは r のみの関数だから一変数の最小化問題となる（ちなみに定義域は全ての正の実数）。

Step 1：微分して導関数を求める。

$$C' = 2\pi\left(2r - 2000r^{-2}\right)$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような r の値を探す。

$$2r - 2000r^{-2} = 0$$

定義域が 0 を含まないので、両辺に r^2 をかけて整理すると

$$r^3 = 1000$$

$$\Rightarrow \quad \therefore \quad r = 10$$

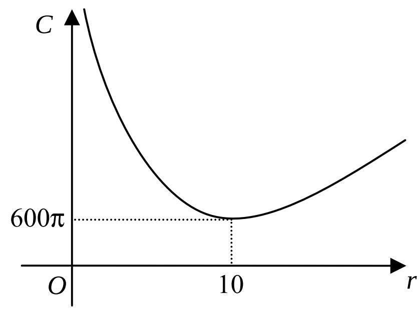
Step 3：Step 2 の r の値を頼りに増減表を書く。

増減表を書くと、下表のようになる。

r	0	・・・	10	・・・
C'		-	0	+
C		↘	600π	↗

Step 4：グラフの大まかな形を描いて解を求める。

増減表よりグラフは右図のようになるから、材料費は底円の半径が 10cm のとき、600π円で最小となる。求めるのは半径ではなくて直径だから、解答は 20cm となる。



問題 9.3:応用問題――例題 9.4 の続き

紙で出来た半径 5cm の円盤で円錐形の容器を作る。円錐の高さが h cm となるようにすると、円錐の体積(V cm^3)は

$$V = \frac{\pi}{3}(25 - h^2)h$$

となる。以下の問いに答えよ。

(1)　h の取りうる範囲を明らかにせよ。

解）円錐を横から見たときには、等しい 2 辺の長さが 5cm の二等辺三角形になる。そのような二等辺三角形の高さが 5cm を超えることはありえないから、定義域は

$$0 < h < 5$$

となる。

(2)　体積を最大にする h とそのときのコップの体積を求めよ。

解）h に関して関数 V を最大化すればよい。

Step 1：微分して導関数を求める。

$$V' = \frac{\pi}{3}(25 - 3h^2)$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような h の値を探す。

$$25-3h^2=0$$

$$\Rightarrow \quad \therefore \ h=\sqrt{\frac{25}{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

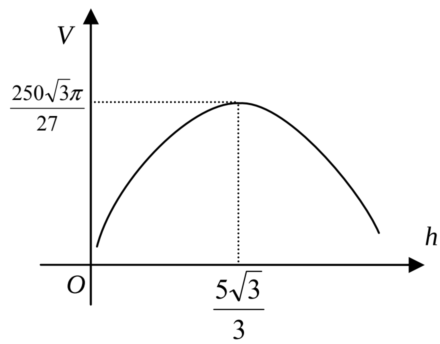
Step 3：Step 2 の h の値を頼りに増減表を書く。

増減表を書くと、下表のようになる。

h	0	・・・	$5\sqrt{3}/3$	・・・	5
V'		+	0	-	
V		↗	$250\sqrt{3}\pi/27$	↘	

Step 4：グラフの大まかな形を描いて解を求める。

増減表よりグラフは右図のようになるから、体積は円錐の高さ h が $5\sqrt{3}/3$ cm のとき、$250\sqrt{3}\pi/27$ cm^3 で最大となる。



(3)　結局、弧 AB の長さはどうなるか。

解）高さが h のときの円錐の底円の円周の長さは、

$$2\times\sqrt{25-h^2}\times\pi$$

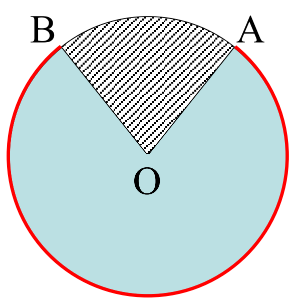
となる。よって、体積が最大になるときの円錐の底円の円周の長さは

$$2\times\sqrt{25-\frac{25}{3}}\times\pi=2\times5\sqrt{\frac{2}{3}}\times\pi=\frac{10\sqrt{6}}{3}\pi$$

である。一方、元々の円盤の円周の長さは 10πcm であるから、弧 AB の長さは

$$10\pi-\frac{10\sqrt{6}}{3}\pi=10\pi\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

（単位 cm）となる。

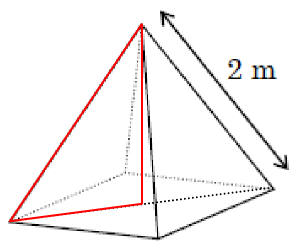


赤線部分の長さは円錐の底円の円周の長さに等しい

問題 9.4:応用問題

1 本 2 mの棒 4 本を正方形の四隅にたてて、図のようなピラミッド型のテントを作る。

(1) テントの高さが x mのとき、テント底面の正方形の面積を求めよ。



解）ピラミッドの頂点から底面に下ろした垂線を一辺とする右図の赤い三角形を考える。これは直角三角形であり、斜辺の長さは 2m で高さは x mである。

直角三角形の残る一辺の長さは（底面の正方形の対角線の長さの半分であるが）、三平方の定理より、

$$\sqrt{4-x^2}$$

（単位 m）である。底面は対角線によって 4 つの直角二等辺三角形に分けられ、それらの面積は全て

$$\frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{2}=\frac{4-x^2}{2}$$

（単位 m^2）であるから、底面の面積はその 4 倍の

$$8-2x^2$$

（単位 m^2）となる。

(2) テントの体積は最大で何 m^3 になるか。

解）ピラミッドの体積を $V\,\mathrm{m}^3$ とすると、四角錐の体積は底面積×高さ÷３だから、

$$V=\frac{(8-2x^2)x}{3}$$

この関数（定義域は $0<x<2$)を x について最大化すればよい。

Step 1：微分して導関数を求める。

$$V'=\frac{8-6x^2}{3}$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような x の値を探す。

$$8-6x^2=0$$

$$\Rightarrow \qquad \therefore \quad x=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

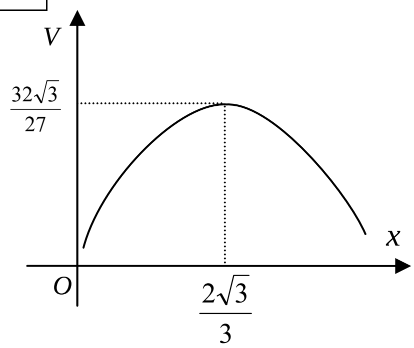
Step 3：Step 2 の x の値を頼りに増減表を書く。

増減表を書くと、下表のようになる。

x	0	・・・	$2\sqrt{3}/3$	・・・	2
V'		+	0	-	
V		↗	$32\sqrt{3}/27$	↘	

Step 4：グラフの大まかな形を描いて解を求める。

増減表よりグラフは右図のようになるから、体積はテントの高さ x が $2\sqrt{3}/3$ ｍのとき、$32\sqrt{3}/27$ ㎥で最大となる。



問題 9.5:計算練習問題

問 9.1 の８つの関数の２階の導関数を求め、内点解が２階の条件を満たしているか確かめよ。

解説　2 階の条件を確認しておくと、「2 階の微分係数 f'' が最大内点解では非正（ $f''\le 0$ ）、最小内点解では非負（ $f''\ge 0$ ）とならなければならない」というものです。内点解のみについてこの条件を確認すればよいのです。

解答

(1) ２階の導関数は

$$f''(x)=-6x-20$$

最大内点解では $f''(1/3)=-2-20=-22<0$

最小内点解では $f''(-7)=42-20=22>0$

となり、ともに２階の条件を満たしている。

(2) ２階の導関数は

$$f''(x)=\frac{36}{x^3}$$

最大値は端点解であるので対象外。

最小内点解では $f''(\sqrt{6})=\dfrac{36}{6\sqrt{6}}=\sqrt{6}>0$

となり、２階の条件を満たしている。

(3)　２階の導関数は

$$\begin{aligned}f''(x)&=10(x-3)\cdot(2x-1)\cdot(2x-3)+10(x-3)^2\cdot(2x-3)+10(x-3)^2\cdot(2x-1)\\&=10(x-3)[(2x-1)\cdot(2x-3)+(x-3)\cdot(2x-3)+(x-3)\cdot(2x-1)]\\&=10(x-3)[8x^2-24x+15]\end{aligned}$$

最大解は２つあるが内点解は 1/2 のみ。そこでは

$$f''(1/2)=10\frac{-5}{2}[2-12+15]=-125<0$$

となり、2 階の条件を満たしている。

最小解は端点解なので対象外。

(4)　２階の導関数は

$$f''(x)=\frac{1}{x}$$

最大解は端点解なので対象外。

最小内点解では $f''(1/e)=e\approx 2.718>0$

となり、２階の条件を満たしている。

(5)　２階の導関数は

$$f''(x)=\frac{4x(x^2+x+1)^2-(2x^2-2)\cdot 2(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}$$

$$=\frac{4[x(x^2+x+1)-(x^2-1)\cdot(2x+1)]}{(x^2+x+1)^3}=\frac{4(-x^3+3x+1)}{(x^2+x+1)^3}$$

最大内点解では $f''(-1)=\dfrac{4(1-3+1)}{(1-1+1)^3}=-4<0$

最小内点解では $f''(1)=\dfrac{4(-1+3+1)}{(1+1+1)^3}=\dfrac{4\cdot 3}{3^3}=\dfrac{4}{9}>0$

となり、ともに 2 階の条件を満たしている。

略解の最小内点解における 2 階の微分係数の値が間違っていました。訂正します。

(6) 2 階の導関数は

$$f''(x) = 2 - \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}} + x\left(-\frac{5}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right) = 2 - \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}$$

最大内点解では、 $f''\left(\frac{4^2}{5^2}\right) = 2 - \frac{15}{4}\frac{4}{5} = 2 - 3 = -1 < 0$

となり、2 階の条件を満たす。

最小解は存在しないので対象外。

以上