第 11 章　章末問題の解答

問 11.1：Cobb-Douglas 型関数

以下の効用関数は Cobb-Douglas 型関数である。

$$u = U(c_1, c_2) = \sqrt{c_1 c_2}$$

(1)　$U(c_1, c_2) = a \cdot c_1^{\alpha} c_2^{\beta}$ の形に書き換えるとき、a, α, β の値はそれぞれいくらになるか。

解）効用関数を書き換えると、

$$U(c_1, c_2) = \sqrt{c_1 c_2} = (c_1 c_2)^{1/2} = 1 \cdot {c_1}^{1/2} {c_2}^{1/2}$$

となるので、$a = 1, \alpha = 1/2, \beta = 1/2$ になる。

(2)　第 1 財の消費量 c_1 が 3 で第 2 財の消費量 c_2 が 12 のとき効用水準 u はいくらになるか。

解）効用関数に代入すると

$$u = U(3, 12) = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

となるので、効用水準は 6 になる。

(3)　効用 u の値が 3 となる等高線の方程式を求め、そのグラフを(c_1, c_2)平面に描け。

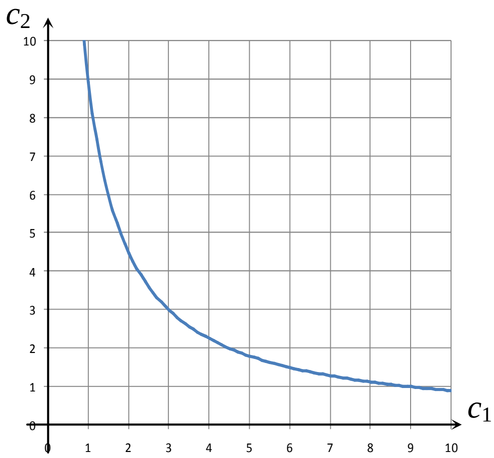
解）$u = 3$ なので、等高線の方程式は

$$\sqrt{c_1 c_2} = 3$$

である。両辺を 2 乗して書き変えると

$$c_2 = \frac{9}{c_1}$$

となる。この関数のグラフは右図のような双曲線になる。



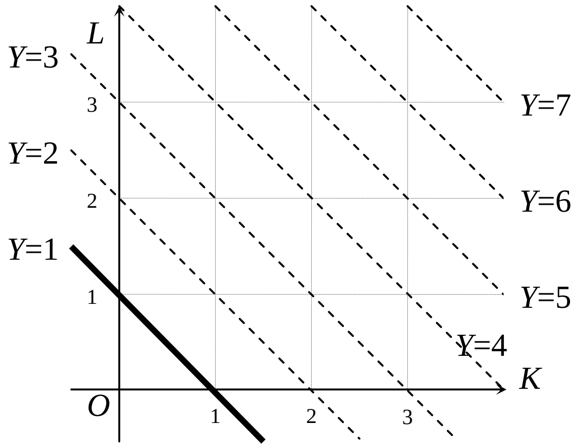
ちなみに、この双曲線には対になるもう一つの曲線グラフが第３象限（ともに負の領域）に存在しますが、与えられた効用関数では、消費量がマイナスになるケースは考慮されていません。

問 11.2：CES 型関数

以下の CES 型生産関数について以下の問いに答えよ。

$$Y = F(K, L) = [K^{\rho} + L^{\rho}]^{1/\rho}$$

(1)　$\rho=1$ のとき、$Y=1$ の等高線グラフを(K, L)平面に描け。この関数の立体グラフはどのような形になると予想されるか。



解）$\rho=1$ のとき、

$$Y=F(K,L)=K+L$$

となるから、等高線の方程式は

$$K+L=1$$

$$\Rightarrow \quad L=-K+1$$

そのグラフは右図のような傾き－１の直線になる。

Y の大きさの異なる複数の等高線のグラフは図のような平行な直線（破線）になるので、立体グラフが平面になると予想される。

(2)　$\rho=0.5$ のとき、$Y=1$ の等高線グラフを(K, L)平面に描け。

解）$\rho=0.5$ のとき、

$$Y=F(K,L)=(K^{1/2}+L^{1/2})^2$$

となるから、等高線の方程式は

$$(K^{1/2}+L^{1/2})^2=1$$

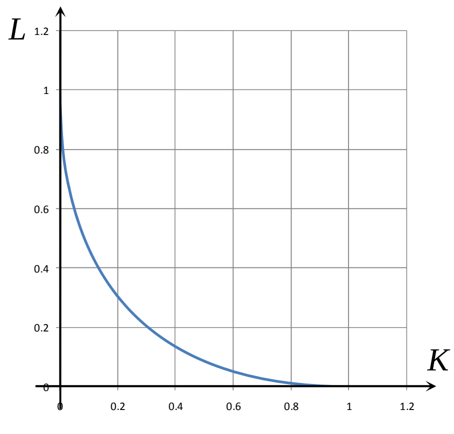
両辺の平方根を取って整理すると（K と L は負の値を取らないので、負の平方根を考慮する必要はない）、

$$K^{1/2}+L^{1/2}=1$$

$$\Rightarrow \quad L^{1/2}=1-K^{1/2}$$

ここで左辺は正の値だが、K が 1 より大きくなると右辺が負になるので、等高線上の K の値の範囲は 1 以下の実数に限定される（この関数において K と L は対等なので、この議論は L についても当てはまる）。このことに注意して両辺を 2 乗すると、

$$L=(1-K^{1/2})^2=1-2\sqrt{K}+K \quad \text{ただし} \quad 0\le K\le 1$$



微分の知識を使ってこの関数のグラフを書いてみよう。

等高線上では L が K の関数になっているので、微分をしてグラフの傾きを調べる。

$$\frac{dL}{dK}=-2\times\frac{1}{2}K^{-1/2}+1=1-\frac{1}{\sqrt{K}}$$

定義域 $0\le K\le 1$ の内点では、常に傾きがマイナスで K が大きくなるほど傾きは大きくなり、$K=1$ のときに傾きが 0 になる。逆に K が 0 に近づくとき傾きはマイナス無限大に発散する。$K=1$ のときに $L=0$、$K=0$ のときに $L=1$ であるから、等高線のグラフは上図のような原点に向かって凸のグラフになることがわかる。

(3)　$\rho=-1$ のとき、Y＝1 の等高線グラフを(K, L)平面に描け。

条件式が間違っていました。お詫びして訂正します。

解 ρ =–1 のとき、

$$Y=F(K,L)=(K^{-1}+L^{-1})^{-1}$$

となるから、等高線の方程式は

$$(K^{-1}+L^{-1})^{-1}=1$$

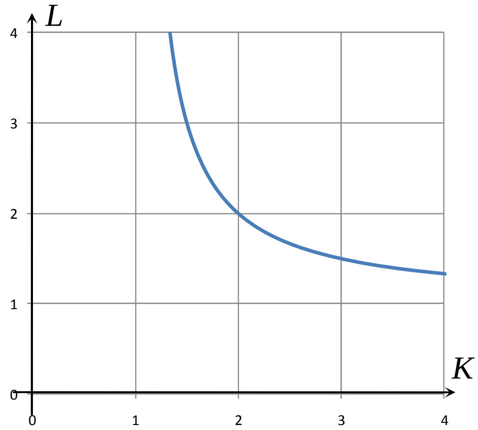
両辺の逆数を取る（両辺を－１乗する）。1 は逆数を取っても 1 だから、

$$K^{-1}+L^{-1}=1$$

$$\Rightarrow\quad L^{-1}=1-K^{-1}=\frac{K-1}{K}$$

ここで左辺は正の値だが、K が 1 より小さくなると右辺が負になるので、等高線上の K の値の範囲は 1 以上の実数に限定される（この関数において K と L は対等なので、この議論は L についても当てはまる）。このことに注意して再び両辺の逆数をとると、

$$L=\frac{K}{K-1}=\frac{1}{K-1}+1\quad ただし\quad K\geq 1$$



この等高線グラフは双曲線 L= 1/K を K 軸方向に 1、L 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフであるから、右図のような原点に向かって凸のグラフになることがわかる。

問 11.3：Leontief（レオンチェフ）型関数

あるお店では牛乳と砂糖だけでアイスクリームを作っている。この店では牛乳と砂糖を 3 対 1 の比率で混ぜてアイスクリームを作っている。例えば牛乳 300cc に対して、砂糖を 100g の割合で混ぜると 400g のアイスクリームができる。牛乳 M cc と砂糖 S g からできるアイスクリームの量を I g とするとき、以下の問いに答えよ。

(1)　M＝400, S＝400 のときの I を求めよ。

解）必要な砂糖の量は牛乳の量の 3 分の 1 だから、400/3g だけ必要で、400cc の牛乳と 400/3g の砂糖からできるアイスクリームの量は(400+400/3)=1600/3g である。

(2)　I は M と S を独立変数とする 2 変数関数である。関数関係を式あるいは言葉で表せ。

解）ちょうど牛乳とミルクの比率が 3 対 1 のとき（すなわち $M=3S$ であるとき）、牛乳と砂糖はいずれも余ることがないが、この比率よりいずれかが少ない場合には、少ないほうの量がアイスクリームの量を決めることになる。

①$M<3S$ であるとき＝牛乳が過少なとき

牛乳の量がアイスクリームの量を決定する。必要な砂糖の量は $M/3$ なので出来上がるアイスクリームの量は

$$I=M+\frac{M}{3}=\frac{4M}{3}$$

②$M>3S$ であるとき＝砂糖が過少なとき

砂糖の量がアイスクリームの量を決定する。必要な牛乳の量は $3S$ なので出来上がるアイスクリームの量は

$$I=3S+S=4S$$

以上の結果をまとめると（ちょうど等号の場合を①に含めると）、

$$I=\begin{cases}4M/3 & \text{if}\quad M\le 3S\\ 4S & \text{if}\quad M>3S\end{cases}$$

条件を書き換えると、「アイスクリームの量は $4M/3$ と $4S$ の小さいほうになる」ことがわかる。

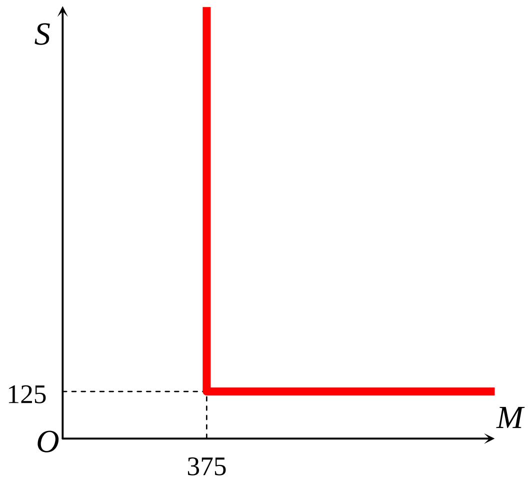
参考：数学ではこのような関数関係を次のように表す。

$$I=\min[4M/3,\ 4S]$$

この式を書いても正解。

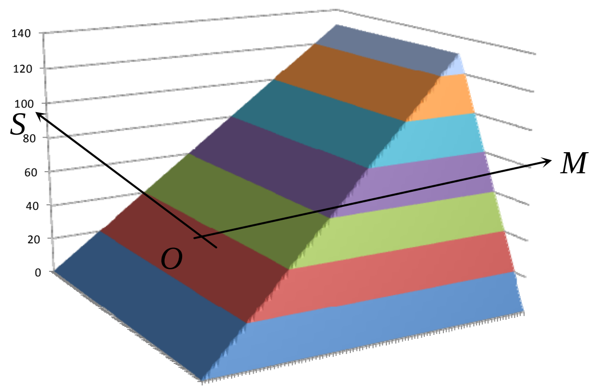
(3)　I ＝500 となる等高線のグラフを(M, S)平面に描け。

解）500g のアイスクリームを作るのに必要な牛乳の量は 500×3/4＝375cc、砂糖の量は 500/4=125g となる。一方の量が固定された状態で、他方の量だけを増やしてもアイスクリームの量は増えないから、等高線のグラフは右図の赤線のようになる。



(4) 関数の立体グラフはどのような形になるか。

解）アイスクリームの量が多くなると、それだけ多くの牛乳と砂糖が必要になるので、等高線は右上に平行シフトしていく。等高線が(3)のようなL字型になる立体グラフはピラミッドのような角を持つ図形になる。ちなみに、エクセルで描いと立体グラフは右図のようになる。



以上