第 12 章　章末問題の解答

問 12.1：基礎概念確認

$\partial f(a_1,a_2)/\partial x_2$ とは何ですか。以下の空欄を埋めよ。

テキストに答えが載っていますが、確認しましょう。

(1) 点$(x_1, x_2)=(a_1, a_2)$における、x_2 に関する関数 f の偏微分係数

(2) 定義式を完成させなさい。

$$\frac{\partial f(a_1,a_2)}{\partial x_2} \equiv \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(a_1, a_2+\Delta x_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_2}$$

注：Δx_2 を h などの違う文字に置き換えてもよい。

(3) x_1 の値を a_1 に固定した 1 変数関数 $f(a_1, x_2)$のグラフの $x_2 = a_2$ における接線の傾き

(4) $y = f(x_1, x_2)$ の 3 次元グラフの点$(x_1, x_2, y) = (a_1, a_2, f(a_1, a_2))$における x_1 軸に垂直な接線**の傾き**

↑抜けていました。
訂正します。

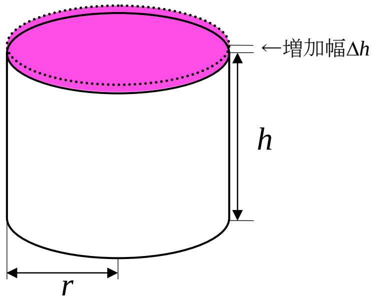
問 12.2：応用問題

円柱の体積 V は底円の半径 r と高さ h の 2 変数関数である。関数の式を明らかにして、偏微分しなさい。また計算結果の意味を考えてみよう。

偏微分するとは、全ての独立変数に関して、それぞれ偏微分することを意味します。

解）円柱の体積(V)　＝　底円の面積　×　高さ(h)

　　　　　　　　＝　(底円の半径$(r)^2$　×　円周率π)　×　高さ(h)



であるから、

$$V = \pi r^2 h$$

となる。この 2 変数関数をまず h で微分すると、

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

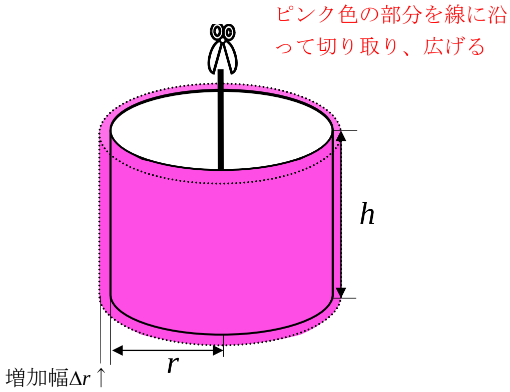
が得られる。これは円柱の底円の面積に他ならない。高さ h に関する偏微分係数は「高さ h が微小に増加したときに体積 V がその何倍変化するか」を示す。高さが微小にΔh だけ増加すると、円柱の体積は右上図のピンク色の部分だけ大きくなる。その体積は

$$\pi r^2 \times \Delta h$$

つまり、体積は高さの増加Δh の円柱底円の面積（πr^2）倍だけ大きくなる。偏微分の結果はこのことを表している。

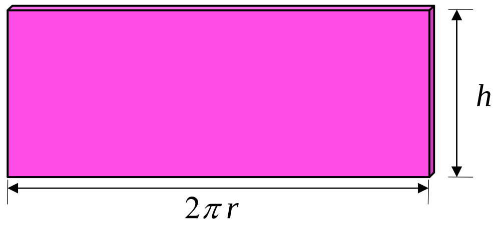
次に、r で微分すると、

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r \cdot h$$



が得られる。この結果が何を意味しているかを考えよう。半径 r に関する偏微分係数は「半径 r が微小に増加したときに体積 V がその何倍変化するか」を示す。半径が微小にΔr だけ増加すると、円柱はそれだけ太くなる。体積の増加部分は右図のピンク色の部分になる。この部分は筒状の形をしているが、それを図のように切り取り、広げると長方形の板の

ような形になることがわかる（厳密には厚みのある曲面を伸ばすと歪みができるが、Δr が十分に小さければ歪みは無視できる）。



長方形の面積は円柱の側面の面積とほぼ等しいので、一辺の長さは円柱の高さ h、残る辺の長さは円柱底円の円周の長さ $2\pi r$ である。ちなみに板の厚みはΔr である。よって、増加部分の体積はおよそ

$$2\pi r \cdot h \times \Delta r$$

つまり、体積は半径の増加Δr の円柱側面の面積（$2\pi rh$）倍だけ大きくなる。偏微分の結果はこのことを表している。

問 12. 3：経済学への応用

次の Cobb-Douglas 型生産関数を偏微分しなさい。

$$F(K,L) = a \cdot K^{\alpha} L^{\beta}$$

ただし、a, α, βは全てプラスの定数とする。

偏微分するとは、全ての独立変数に関して、それぞれ偏微分することを意味します。

解）K に関する偏微分

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = a\alpha \cdot K^{\alpha-1} L^{\beta}$$

L に関する偏微分

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = a\beta \cdot K^{\alpha} L^{\beta-1}$$

問 12. 4：経済学への応用

次の CES 型効用関数を偏微分しなさい。

$$U(c_1, c_2) = [a \cdot c_1^{\rho} + b \cdot c_2^{\rho}]^{1/\rho}$$

ただし、a, b はプラスの定数、ρ は 1 以下の 0 でない定数とする。

偏微分するとは、全ての独立変数に関して、それぞれ偏微分することを意味します。

解）c_1 に関する偏微分をする際は、c_2 を定数とみなして微分すればよい。c_2 を定数とみなすと関数は一変数の関数になるが、CES 関数は次のような 2 つの関数が合成された関数になっていることがわかる。

$$U = X^{1/\rho}, \quad X = a \cdot c_1^{\rho} + b \cdot c_2^{\rho}$$

合成関数の微分の公式から U を c_1 で微分すると、

$$\frac{\partial U}{\partial c_1} = \frac{dU}{dX} \cdot \frac{dX}{dc_1}$$

となる（厳密には X の c_1 に関する微分は偏微分$\partial X/\partial c_1$ になるが、ここでは c_2 を定数とみなしているので微分で表現した）。

$$\frac{dU}{dX} = \frac{1}{\rho} X^{\frac{1}{\rho}-1}, \quad \frac{dX}{dc_1} = a\rho \cdot c_1^{\rho-1}$$

よって、

$$\frac{\partial U}{\partial c_1} = \frac{1}{\rho} X^{\frac{1}{\rho}-1} \cdot a\rho \cdot c_1^{\rho-1} = a \cdot c_1^{\rho-1} X^{\frac{1}{\rho}-1}$$

ここで $X = a \cdot c_1^{\rho} + b \cdot c_2^{\rho}$ だから、

$$\frac{\partial U}{\partial c_1} = a \cdot c_1^{\rho-1} [a \cdot c_1^{\rho} + b \cdot c_2^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}-1}$$

同様に、c_2 に関する偏微分は

$$\frac{\partial U}{\partial c_2} = b \cdot c_2^{\rho-1} [a \cdot c_1^{\rho} + b \cdot c_2^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}-1}$$

となる。

以上