第 15 章　章末問題の解答

問 15.1：経済学への応用

ある国の国民所得 Y がこの国の資本量 K と労働人口 L によって次の式によって決定されているとする。

$$Y = K^{1/3}L^{2/3}$$

K と L はともに時点 t の関数であるとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)微分係数 dK/dt の経済学的な意味は何か。

はじめに「資本量 K が時点 t の関数である」ことについて補足をします。

資本量は投資によって増え、資本減耗によって減少するもので計測ができれば時間の関数になることは事実ですが、それが連続であるか、また微分可能であるかについては議論の余地があります。しかし、実際のデータを見ると年間投資量は長い目で見れば滑らかな曲線を描いて推移しているので、経済学者は連続で微分可能な関数であると仮定をして議論をします。

資本量 K が時点 t の連続で微分可能な関数であるならば、そのグラフは滑らかな曲線を描くはずで、微分係数 dK/dt はある時点におけるグラフの（接線の）傾きです。接線の傾きは、時間が 1 単位増えたとき、すなわち時間が一定期間経過したときに、資本量がどれだけ増えるかを表します。この値が大きければそれだけ勢いよく、早いスピードで資本が増えていることを意味しますから、微分係数 dK/dt はある時点における資本の増加速度あるいは成長速度と言えるわけです。

ここで「一定期間」は時間の単位の取り方によって決まります。物理などでは秒、分、時間などの比較的短い単位を取るのが普通ですが、経済ではそれぐらい短い期間ではデータがとれないので、月や年などの長い期間を単位にとります。たとえば年を単位に取っている場合、傾き（増加速度）がそのまま変化しなければ資本量が 1 年間で dK/dt だけ増えると言えます。

成長速度を成長率と勘違いする人がいますが、全く異なる概念なので注意が必要です。たとえば身長を考えてみて下さい。たとえば、「1 年間に 2cm 身長が伸びる」というのが成長速度です。成長速度が速い人は同じ 1 年でも伸長する幅が大きくなります。一方、成長率は変化する前と比べて何%身長が伸びたかを表します。1 年間に 2cm 身長が伸びた人でも、変化前の身長が 1m ならば成長率は 2%になりますが、変化前の身長が 2m ならば成長率は 1%にすぎません。成長速度と成長率の違いを理解しましょう。

(2)初期時点 $t=0$ において、

$$K = 1000, \quad L = 8000, \quad \frac{dK}{dt} = 9, \quad \frac{dL}{dt} = 3$$

とする。初期時点の微分係数 dY/dt の値を求めよ。

解）関数の名前を F とする。２変数関数の合成関数の微分の公式（p.287）に当てはめると、初期時点における dY/dt の値は

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial F(1000,8000)}{\partial K} \cdot \frac{dK}{dt} + \frac{\partial F(1000,8000)}{\partial L} \cdot \frac{dL}{dt}$$

となる。関数を偏微分して偏微分係数を求める。

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}=\frac{1}{3}K^{-2/3}\cdot L^{2/3}=\frac{1}{3}\left(\frac{L}{K}\right)^{2/3} \quad \text{より、} \quad \frac{\partial F(1000,8000)}{\partial K}=\frac{1}{3}\left(\frac{8000}{1000}\right)^{2/3}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=\frac{2}{3}K^{1/3}\cdot L^{-1/3}=\frac{2}{3}\left(\frac{K}{L}\right)^{1/3} \quad \text{より、} \quad \frac{\partial F(1000,8000)}{\partial L}=\frac{2}{3}\left(\frac{1000}{8000}\right)^{1/3}=\frac{1}{3}$$

また、$\dfrac{dK}{dt}=9,\quad \dfrac{dL}{dt}=3$ だから、

$\dfrac{dY}{dt}=\dfrac{4}{3}\cdot 9+\dfrac{1}{3}\cdot 3=13$ ←テキスト巻末の解答が間違っていました。お詫びして訂正します。

となる。

問 15. 2 : 1 次同次関数の例

２つの関数が与えられている。

$$f(x_1,x_2)=x_1^{0.5}x_2^{0.5} \qquad g(x_1,x_2)=(x_1^{1/2}+3x_2^{1/2})^2$$

(1) 関数 f と g はいずれも 1 次同次性を満たす。証明せよ。

証明）１次同次性の定義式が満たされることを示せばよい。この問題では任意の正数 a と任意の x_1, x_2 に対して、次の関係式が成り立つことを示せば良い。

$$f(ax_1,ax_2)=af(x_1,x_2) \qquad g(ax_1,ax_2)=ag(x_1,x_2)$$

まず、関数 f から調べる。

$$\begin{aligned} f(ax_1,ax_2) &= (ax_1)^{0.5}(ax_2)^{0.5} \\ &= a^{0.5}x_1^{0.5}\cdot a^{0.5}x_2^{0.5} \\ &= a^{0.5}a^{0.5}\cdot x_1^{0.5}x_2^{0.5} \\ &= a^{0.5+0.5}\cdot x_1^{0.5}x_2^{0.5} \\ &= a\cdot x_1^{0.5}x_2^{0.5}=af(x_1,x_2) \end{aligned}$$

よって関数 f は 1 次同次性を満たす。

次に関数 g を調べる。

$$\begin{aligned} g(ax_1,ax_2) &= [(ax_1)^{1/2}+3(ax_2)^{1/2}]^2 \\ &= [a^{1/2}\cdot x_1^{1/2}+3\cdot a^{1/2}\cdot x_2^{1/2}]^2 \\ &= [a^{1/2}\cdot(x_1^{1/2}+3\cdot x_2^{1/2})]^2 \end{aligned}$$

$$= \left(a^{1/2}\right)^2 \cdot \left(x_1^{1/2} + 3 \cdot x_2^{1/2}\right)^2$$

$$= a \cdot \left(x_1^{1/2} + 3 \cdot x_2^{1/2}\right)^2 = a \cdot g(x_1, x_2)$$

よって関数 g も１次同次性を満たすことが示された。

証明終わり

(2) 関数 f と g のそれぞれについて性質１と性質２が成り立つことを確認せよ。

証明）(1)と同様に性質１と性質２の式が満たされることを示せばよい。この問題では任意の正数 a と任意の x_1，x_2 に対して、次の関係式が成り立つことを示せば良い。

性質１ $\dfrac{\partial f(ax_1, ax_2)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ かつ $\dfrac{\partial f(ax_1, ax_2)}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$

$\dfrac{\partial g(ax_1, ax_2)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ かつ $\dfrac{\partial g(ax_1, ax_2)}{\partial x_2} = \dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}$

性質２ $f(x_1, x_2) = \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_2$

$g(x_1, x_2) = \dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_2$

まず、関数 f から調べる。関数 f の導関数は

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0.5 x_1^{0.5-1} x_2^{0.5} = 0.5\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0.5} \qquad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0.5 x_1^{0.5} x_2^{0.5-1} = 0.5\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0.5}$$

よって、

性質１：
$$\frac{\partial f(ax_1, ax_2)}{\partial x_1} = 0.5\left(\frac{ax_2}{ax_1}\right)^{0.5} = 0.5\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0.5} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f(ax_1, ax_2)}{\partial x_2} = 0.5\left(\frac{ax_1}{ax_2}\right)^{0.5} = 0.5\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0.5} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

また、

性質２：

右辺＝$\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_2$

$$= 0.5\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0.5} \times x_1 + 0.5\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0.5} \times x_2$$

$$= 0.5x_1^{0.5}x_2^{0.5} + 0.5x_1^{0.5}x_2^{0.5}$$
$$= x_1^{0.5}x_2^{0.5} = f(x_1, x_2) = \text{左辺}$$

よって、関数 f は性質１と性質２をともに満たす。

次に関数 g を調べる。関数 g の導関数は

$$\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2(x_1^{1/2} + 3x_2^{1/2}) \cdot \frac{1}{2} x_1^{-1/2} = \boxed{(x_1^{1/2} + 3x_2^{1/2}) \cdot x_1^{-1/2}} = 1 + 3\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2(x_1^{1/2} + 3x_2^{1/2}) \cdot \frac{3}{2} x_2^{-1/2} = \boxed{3(x_1^{1/2} + 3x_2^{1/2}) \cdot x_2^{-1/2}} = 3\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/2} + 9$$

偏微分の仕方がわからない人は章末問題／問 12.4、問 13.2、問 14.2 を参照してください。

よって、

性質１：
$$\frac{\partial g(ax_1, ax_2)}{\partial x_1} = 1 + 3\left(\frac{ax_2}{ax_1}\right)^{1/2} = 1 + 3\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1/2} = \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial g(ax_1, ax_2)}{\partial x_2} = 3\left(\frac{ax_1}{ax_2}\right)^{1/2} + 9 = 3\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/2} + 9 = \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

また、

性質２：

$$\text{右辺} = \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_2$$

$$= [(x_1^{1/2} + 3x_2^{1/2}) \cdot x_1^{-1/2}] \times x_1 + [3(x_1^{1/2} + 3x_2^{1/2}) \cdot x_2^{-1/2}] \times x_2$$

参考：性質２の証明では偏導関数を上の赤枠の形で代入すると計算が簡単になる。

$$= (x_1^{1/2} + 3x_2^{1/2}) \cdot x_1^{1/2} + 3(x_1^{1/2} + 3x_2^{1/2}) \cdot x_2^{1/2}$$
$$= (x_1^{1/2} + 3x_2^{1/2}) \cdot (x_1^{1/2} + 3 \cdot x_2^{1/2})$$
$$= (x_1^{1/2} + 3x_2^{1/2})^2 = g(x_1, x_2) = \text{左辺}$$

よって、関数 g も性質１と性質２をともに満たす。

証明終わり

解説：性質１を言葉で表現すると「x_1 と x_2 の比が同じならば、１階の偏微分係数の値は同じである」と言い表わせる。したがって、偏導関数が x_1 と x_2 の比（x_1/x_2 または x_2/x_2）の関数で表わされれば、性質１が成り立つと言える。いずれの偏導関数もこの性質を満たしていることを確認しよう。

(3) 関数 f と g のそれぞれについて点(4,1)における２次近似関数を求めよ。

解）求める関数 f と g の２次近似関数をそれぞれ F と G とすると、

$$F(x_1,x_2)=f(4,1)+\frac{\partial f(4,1)}{\partial x_1}\cdot(x_1-4)+\frac{\partial f(4,1)}{\partial x_2}\cdot(x_2-1)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial f^2(4,1)}{\partial x_1{}^2}\cdot(x_1-4)^2+\frac{\partial f^2(4,1)}{\partial x_1\partial x_2}\cdot(x_1-4)(x_2-1)+\frac{1}{2}\frac{\partial f^2(4,1)}{\partial x_2{}^2}\cdot(x_2-1)^2$$

$$G(x_1,x_2)=g(4,1)+\frac{\partial g(4,1)}{\partial x_1}\cdot(x_1-4)+\frac{\partial g(4,1)}{\partial x_2}\cdot(x_2-1)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial g^2(4,1)}{\partial x_1{}^2}\cdot(x_1-4)^2+\frac{\partial g^2(4,1)}{\partial x_1\partial x_2}\cdot(x_1-4)(x_2-1)+\frac{1}{2}\frac{\partial g^2(4,1)}{\partial x_2{}^2}\cdot(x_2-1)^2$$

である。

　まず関数 F から求める。

$$f(4,1)=4^{0.5}\times1^{0.5}=2$$

$\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0.5x_1^{-0.5}x_2^{0.5}$ より、$\dfrac{\partial f(4,1)}{\partial x_1}=0.5\times4^{-0.5}\times1^{0.5}=\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0.5x_1^{0.5}x_2^{-0.5}$ より、$\dfrac{\partial f(4,1)}{\partial x_2}=0.5\times4^{0.5}\times1^{-0.5}=1$

$\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1{}^2}=-\dfrac{1}{4}x_1^{-1.5}x_2^{0.5}$ より、$\dfrac{\partial^2 f(4,1)}{\partial x_1{}^2}=-\dfrac{1}{4}\times4^{-1.5}\times1^{0.5}=-\dfrac{1}{32}$

$\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{1}{4}x_1^{-0.5}x_2^{-0.5}$ より、$\dfrac{\partial^2 f(4,1)}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{1}{4}\times4^{-0.5}\times1^{-0.5}=\dfrac{1}{8}$

$\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2{}^2}=-\dfrac{1}{4}x_1^{0.5}x_2^{-1.5}$ より、$\dfrac{\partial^2 f(4,1)}{\partial x_2{}^2}=-\dfrac{1}{4}\times4^{0.5}\times1^{-1.5}=-\dfrac{1}{2}$

これらを代入すると２次近似関数 F は

$$F(x_1,x_2)=2+\frac{1}{4}(x_1-4)+(x_2-1)-\frac{1}{64}(x_1-4)^2+\frac{1}{8}(x_1-4)(x_2-1)-\frac{1}{4}(x_2-1)^2$$

となる。

　次に関数 G を求める。

$$g(4,1)=(4^{0.5}+3\cdot1^{0.5})^2=25$$

$\dfrac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_1}=1+3\cdot x_1^{-1/2}\cdot x_2^{1/2}$ より、$\dfrac{\partial g(4,1)}{\partial x_1}=1+3\cdot4^{-1/2}\cdot1^{1/2}=\dfrac{5}{2}$

$\dfrac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_2}=3\cdot x_1^{1/2}\cdot x_2^{-1/2}+9$ より、$\dfrac{\partial g(4,1)}{\partial x_2}=3\cdot4^{1/2}\cdot1^{-1/2}+9=15$

$\dfrac{\partial^2 g(x_1,x_2)}{\partial x_1{}^2}=-\dfrac{3}{2}x_1^{-1.5}x_2^{0.5}$ より、$\dfrac{\partial^2 g(4,1)}{\partial x_1{}^2}=-\dfrac{3}{2}\times4^{-1.5}\times1^{0.5}=-\dfrac{3}{16}$

$\dfrac{\partial^2 g(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{3}{2}x_1^{-0.5}x_2^{-0.5}$ より、$\dfrac{\partial^2 g(4,1)}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{3}{2}\times4^{-0.5}\times1^{-0.5}=\dfrac{3}{4}$

$$\frac{\partial^2 g(x_1,x_2)}{\partial x_2{}^2} = -\frac{3}{2}x_1^{0.5}x_2^{-1.5}$$ より、 $$\frac{\partial^2 g(4,1)}{\partial x_2{}^2} = -\frac{3}{2}\times 4^{0.5}\times 1^{-1.5} = -3$$

これらを代入すると 2 次近似関数 G は

$$G(x_1,x_2) = 25 + \frac{5}{2}(x_1-4) + 15(x_2-1) - \frac{3}{32}(x_1-4)^2 + \frac{3}{4}(x_1-4)(x_2-1) - \frac{3}{2}(x_2-1)^2$$

となる。

問 15.3：発展問題

次の Cobb-Douglas 型関数が 1 次同次性を満たすための条件を求めよ。

$$f(x_1,x_2) = ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$$

解）一次同次性を満たすとは、任意の定数 c と任意の x_1, x_2 に対して、

$$f(cx_1,cx_2) = cf(x_1,x_2)$$

が成り立つことである。与えられた関数に当てはめると

$$\begin{aligned}
f(cx_1,cx_2) &= a(cx_1)^{\alpha}(cx_2)^{\beta} \\
&= a\cdot c^{\alpha}\cdot x_1^{\alpha}\cdot c^{\beta}\cdot x_2^{\beta} \\
&= c^{\alpha+\beta}\cdot ax_1^{\alpha}x_2^{\beta} \\
&= c^{\alpha+\beta}\cdot f(x_1,x_2)
\end{aligned}$$

となる。よって、一次同次性の定義式が成立するためには、$\alpha+\beta=1$ でなければならないことがわかる。（また、このとき一次同次性は必ず成り立つので $\alpha+\beta=1$ は Cobb-Douglas 型関数が一次同次性を満たすための必要条件であると言える。）

以上