

第 16 章 章末問題の解答

問 16.1 : 2 階の条件の確認問題

関数 $f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2$ について、

(1) 1 階の条件を満たす点を見つけよ。

解) 求める点を (x_1^*, x_2^*) とすると、この点は一階の条件

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = -2x_1^* + 3x_2^* = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 3x_1^* - 2x_2^* = 0$$

を満たす。この 2 つの条件式を解くと $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ が唯一の解として得られる。

(2) (1) で得られた点において 2 階の条件 が成立するかどうか確かめよ。

解) 2 階の条件を調べるためにあらかじめ 2 階の偏導関数を求めておく。

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = 3 \quad \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = -2$$

2 階の導関数の値は独立変数の値には依存しないので $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ においても

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_1^2} = -2 \leq 0, \quad \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_2^2} = -2 \leq 0,$$

となり、この点が最大内点解 (極大解) の 2 階の条件のうち と を満たしていることがわかる。しかし、

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_1^2} \times \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = (-2) \times (-2) - 3^2 = 4 - 9 < 0$$

となり、条件 は満たされない。よって、この点は極大点にはならないことがわかる。

(3) (1) で得られた点はどのような点であるか。

(ヒント : この点とその周囲の点における関数の値を調べてみよう。)

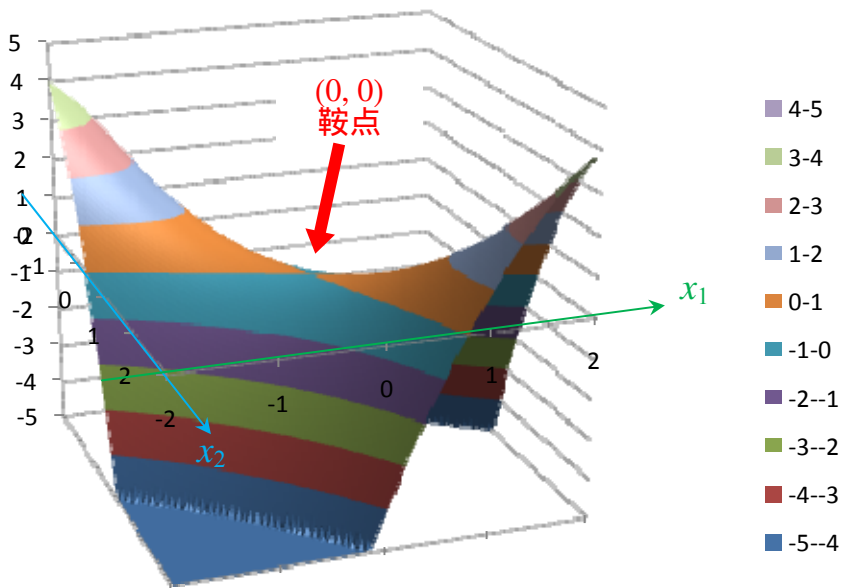
解) まずは簡単な計算で調べてみよう。点 $(0, 0)$ の周りの 8 つの点における関数の値を調べてみると、下の表のようになる。

		x_2 の値		
		-1	0	1
x_1 の値	-1	1	-1	-5
	0	-1	0	-1
	1	-5	-1	1

点(0,0)から、 x_2 を固定して x_1 だけ変化させても値が小さくなるのでグラフの断面が上に凸の山型になっていることが想像できる。同様のことが x_1 を固定して x_2 だけ変化させた場合にも言える。しかし、 x_1 と x_2 を同時に同方向に変化させた場合は値が大きくなってしまい、グラフの断面が下に凸のU字型になることが想像できる。

このように一階の条件を満たす点を通る断面の凸性が切り方によって変わるような曲面は馬の鞍のような形をしていることが知られていて、対応する一階の条件を満たす点は鞍点と呼ばれる。

実際、エクセルを使ってもう少したくさんの点の関数の値を調べてグラフを描いてみると下記のようなグラフになることがわかる。



問 16.2 : 計算練習問題

1 階の条件と 2 階の条件を使って、次の関数の極大値、極小値、鞍点を見つけてみよう。

(1) $y = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 - 4x_1 - 2x_2$

解) 一階の条件を満たす点を (x_1^*, x_2^*) とすると、

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1^* + x_2^* - 4 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1^* - 2x_2^* - 2 = 0$$

を満たす。この2つの条件式を解くと $(x_1^*, x_2^*) = (2, 0)$ が唯一の解として得られる。

2階の条件を調べるためにあらかじめ2階の偏導関数を求めておく。

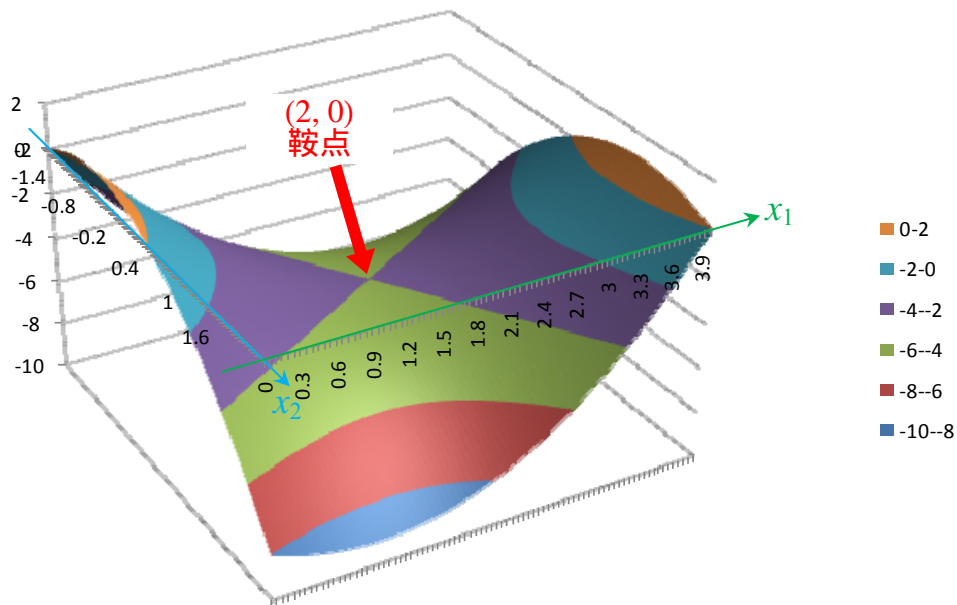
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = 1 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = -2$$

2階の導関数の値は独立変数の値には依存しないので $(x_1^*, x_2^*) = (2, 0)$ においても

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 2 > 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = -2 < 0,$$

となるが、2階の偏微分係数の符号が逆なので、(極大・極小のどちらについても)2階の条件のうち と の一方を必ず満たさない。よって、条件 を調べるまでもなく、極大点・極小点にはなりえないことがわかる。このような場合には鞍点になる。

実際にグラフを描くと下図のようになる。



$$(2) \quad y = x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2 + 3$$

解) 一階の条件を満たす点を (x_1^*, x_2^*) とすると、

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 4x_1^3 - 4x_2^* = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -4x_1^* + 4x_2^{*3} = 0$$

を満たす。この2つの条件式を解く。

第1条件を x_2^* について解いて、

$$x_2^* = x_1^{*3} \quad \dots (a)$$

これを第2条件に代入すると、

$$-x_1^* + x_1^{*9} = 0$$

左辺を注意深く因数分解すると、

$$x_1^*(x_1^{*4} + 1)(x_1^{*2} + 1)(x_1^* + 1)(x_1^* - 1) = 0$$

となる。この方程式を満たす x_1^* は $-1, 0, 1$ の3つである。これを(a)式に代入すると

$$(x_1^*, x_2^*) = (-1, -1), (0, 0), (1, 1)$$

の3つの点が一階の条件を満たす解として得られる。

2階の条件を調べるためにあらかじめ2階の偏導関数を求めておく。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 12x_1^{*2} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = -4 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 12x_2^{*2}$$

3つの点のそれぞれについて、2階の条件を調べる。

まず $(x_1^*, x_2^*) = (-1, -1)$ においては、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 12 \times (-1)^2 = 12 > 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 12 \times (-1)^2 = 12 > 0,$$

となり、極小解の2階の条件 と を満たしている。さらに、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \times \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = 12 \times 12 - (-4)^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

となり、極小解の2階の条件 も満たしているため、 $(-1, -1)$ は極小点になっていると考えられる。

同様に、 $(x_1^*, x_2^*) = (1, 1)$ においても

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 12 \times 1^2 = 12 > 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 12 \times 1^2 = 12 > 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \times \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = 12 \times 12 - (-4)^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

となり、極小解の2階の条件 が全て満たされるので、(1,1)も極小点になっていると考えられる。

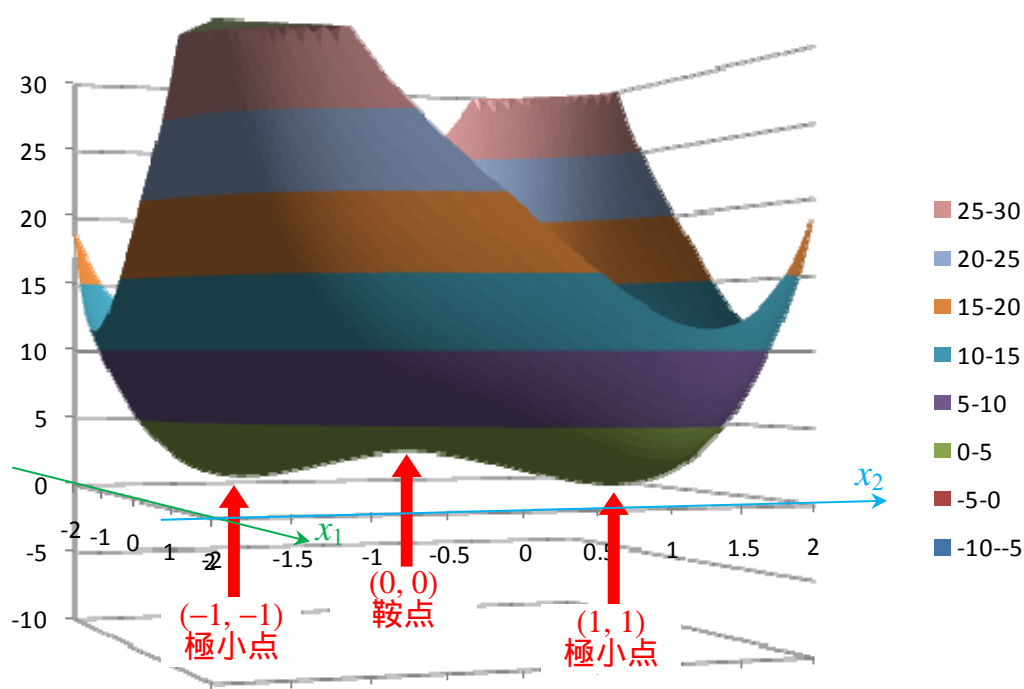
最後に、 $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ においては、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 12 \times 0^2 = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 12 \times 0^2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \times \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = 0 \times 0 - (-4)^2 = 0 - 16 = -16 < 0$$

となり、条件 が成立しないため、極小点にも極大点にもなりえないことがわかる。

実際にグラフを描くと下図のようになる。



$$(3) \quad y = x_1^3 - x_2^3 - 6x_1 + 3x_2$$

解) 一階の条件を満たす点を (x_1^*, x_2^*) とすると、

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 3x_1^{*2} - 6 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -3x_2^{*2} + 3 = 0$$

を満たす。この2つの条件式を解く。

第1条件を解いて、

$$x_1^* = \pm\sqrt{2} \quad \dots (b)$$

同様に第2条件を解いて、

$$x_2^* = \pm 1 \quad \dots (c)$$

(b)式と(c)式を満たす点は全て一階の条件を満たすので

$$(x_1^*, x_2^*) = (-\sqrt{2}, -1), (-\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, -1), (\sqrt{2}, 1)$$

の4つの点が一階の条件を満たす解として得られる。

2階の条件を調べるためにあらかじめ2階の偏導関数を求めておく。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 6x_1^* \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = -6x_2^*$$

4つの点のそれぞれについて、2階の条件を調べる。

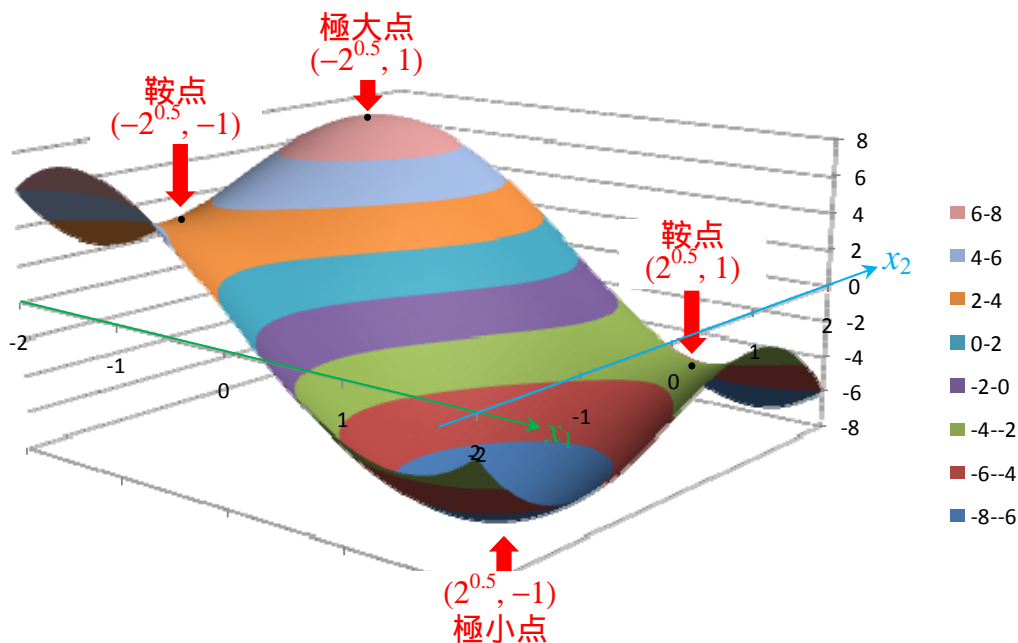
一階の条件を満たす点	$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$	$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}$	$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \times \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2$	判定
$(-\sqrt{2}, -1)$	$-6\sqrt{2} < 0$	$6 > 0$	$-6\sqrt{2} \times 6 - 0^2 = -36\sqrt{2} < 0$	鞍点
$(-\sqrt{2}, 1)$	$-6\sqrt{2} < 0$	$-6 < 0$	$-6\sqrt{2} \times (-6) - 0^2 = 36\sqrt{2} > 0$	極大点
$(\sqrt{2}, -1)$	$6\sqrt{2} > 0$	$6 > 0$	$6\sqrt{2} \times 6 - 0^2 = 36\sqrt{2} > 0$	極小点
$(\sqrt{2}, 1)$	$6\sqrt{2} > 0$	$-6 < 0$	$6\sqrt{2} \times (-6) - 0^2 = -36\sqrt{2} < 0$	鞍点

$(-\sqrt{2}, -1)$ と $(\sqrt{2}, 1)$ は条件 を満たさない上、2つの2階の偏微分係数の符号が逆なので（極大・極小のどちらについても）2階の条件のうち と の一方を必ず満たさない。よって、これらは鞍点になる。

一方、 $(-\sqrt{2}, 1)$ と $(\sqrt{2}, -1)$ は条件 を満たし、 $(-\sqrt{2}, 1)$ は極大解の2階の条件 を全て満たし、

$(\sqrt{2}, -1)$ は極小解の2階の条件を全て満たしていることが確かめられる。

実際にグラフを描くと下図のようになる。



問 16.3 : 応用問題

3点 $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(b, c)$ ($a > 0, b > 0, c > 0$) を頂点とする三角形を考える。各点からの距離の2乗の和が最小になる点 (x_1^*, x_2^*) を求めよ。また、この点は何か。

解) 任意の点 (x_1, x_2) について、各点からの距離の2乗の和を S とすると、 S は (x_1, x_2) の関数になり、その式は

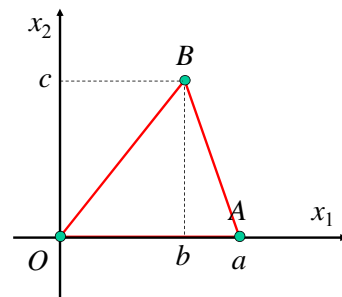
$$S = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x_1 - b)^2 + (x_2 - c)^2}\right)^2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - a)^2 + x_2^2 + (x_1 - b)^2 + (x_2 - c)^2$$

となる。

S を最小にする点を (x_1^*, x_2^*) とすると、この点は一階の条件を満たすから、

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = 2x_1^* + 2(x_1^* - a) + 2(x_1^* - b) = 0$$



$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = 2x_2^* + 2x_2^* + 2(x_2^* - c) = 0$$

を満たす。この2つの条件式を解くと

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3} \right)$$

が唯一の解の候補として得られる。

2階の条件を調べると、

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} = 6 > 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x_2^2} = 6 > 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = 6 \times 6 - 0^2 = 36 > 0$$

となり、極小点の2階の条件を全て満たすことがわかる。

1階の条件と2階の条件は必要条件なので、これ以外の点は解になりえないことがわかる。しかし、十分条件ではないので、これだけではこれが最小解であることの証明にはならないが、3点からの距離が遠くなればなるほど距離の2乗の和も大きくなることから、これが解であることがわかる。

この点は三角形 OAB の重心という点になっている。三角形の重心には色々な特徴があるが、任意の辺（たとえば OA ）の中点 M と残る点（ B ）を結ぶ線分 MB を 1:2 に分ける点であることが知られている。

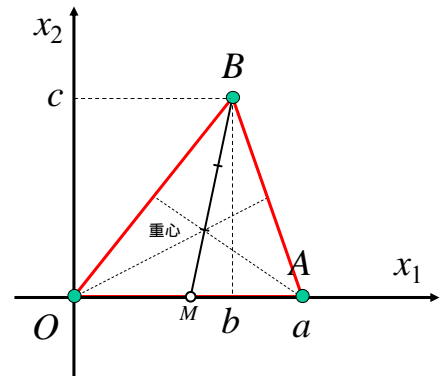
OA の中点 M の座標は

$$\left(\frac{a}{2}, 0 \right)$$

であり、線分 MB を 1:2 に分ける点の座標は

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \times b, \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times c \right) = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3} \right)$$

であり、微分法によって求めた解と一致していることが確かめられる。



問 16.4 : 応用問題

3m の針金を使って直方体の枠を作る。直方体の体積を最大にするには各辺の長さを何 m にすればよいか。（すべての辺の長さの和は 3m である。）

解) 横幅が x_1 m、高さが x_2 m、奥行きが x_3 m の直方体の体積を $V \text{ m}^3$ とすると、 V は x_1, x_2, x_3 の 3 変数を独立変数とする関数になる。この関数を F とすると、

$$V = F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

となる。

この直方体を針金で作る場合、 x_1 m, x_2 m, x_3 m の長さの針金がそれぞれ 4 本ずつ必要であるから、針金の長さの長さの合計が 3m になるためには次の式が成り立たなければならない。

$$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3$$

つまり、この問題は等号制約条件のある最大化問題

$$\max V = F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$s.t. \quad 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3$$

である。

ここからは次の2通りの方法で解くことができる。

制約条件を x_3 について解いて、それを関数 F に代入し、制約条件のない2変数の最適化問題として解く。

ラグランジュ乗数法を使って解く。

以下それぞれの方法で解を求めてみよう。

制約条件を x_3 について解くと、

$$x_3 = \frac{3}{4} - x_1 - x_2$$

となる。これを関数 F に代入すると、

$$V = x_1 \cdot x_2 \cdot \left(\frac{3}{4} - x_1 - x_2 \right)$$

この関数を最大にする2変数 x_1, x_2 の値を求めればよい。

V を最大にする点を (x_1^*, x_2^*) とすると、この点は一階の条件を満たすから、

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = x_2^* \cdot \left(\frac{3}{4} - x_1^* - x_2^* \right) - x_1^* \cdot x_2^* = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = x_1^* \cdot \left(\frac{3}{4} - x_1^* - x_2^* \right) - x_1^* \cdot x_2^* = 0$$

を満たす。この2つの条件式を解く。

$$x_2^* \cdot \left(\frac{3}{4} - 2x_1^* - x_2^* \right) = 0$$

$$x_1^* \cdot \left(\frac{3}{4} - x_1^* - 2x_2^* \right) = 0$$

ここでいずれかの辺の長さが0になると、体積は0になってしまうので、0は解の候補から排除される。よって、最適解は次の連立方程式の解である。

$$\begin{cases} \frac{3}{4} - 2x_1^* - x_2^* = 0 \\ \frac{3}{4} - x_1^* - 2x_2^* = 0 \end{cases}$$

これを解くと

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

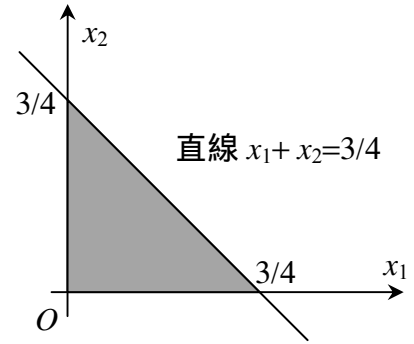
が唯一の解の候補として得られる。

2 階の条件を調べると、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = -2x_1^* = -\frac{1}{2} < 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = -2x_2^* = -\frac{1}{2} < 0,$$

また、 $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{3}{4} - 2x_1^* - 2x_2^* = -\frac{1}{4}$ より、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = \left(-\frac{1}{2} \right) \times \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} > 0$$



図：関数の定義域

となり、極大点の 2 階の条件 を全て満たすことがわかる。

1 階の条件と 2 階の条件は必要条件なので、これ以外の点は解になりえないことがわかる。

しかし、十分条件ではないので、これだけではこれが最小解であることの証明にはならない。この問題では 3 辺の長さがいずれも負になってはならないので、

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 = \frac{3}{4} - x_1 - x_2 \geq 0$$

が関数の定義域になる。この定義域は右上図の三角形の領域であるが、領域の端点ではいずれかの辺の長さが 0 になってしまうので、体積も 0 になる。領域の内点では体積はプラスになるので内点の中に解があり、その候補が一つしかないことが微分により確かめられたので、見つかった解が最適であると言える。

制約条件から x_3 も求めると、最適解は

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

であり、辺の長さがすべて同じ長さ $1/4m$ になる直方体が最適な形と言える。

ラグランジュ乗数法を使う解法

Step 1 : ラグランジュ関数を作る

変数 λ を導入して、新しい関数 $L(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ を作る。

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \lambda(4x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3)$$

等号制約条件を " $= 0$ " の形に書き換えた式の左辺に λ をかけて、最大化する関数 F に足せばいいのです。

Step 2 : 1 階の条件を調べる

最適内点解を (x_1^*, x_2^*, x_3^*) とすると、ある λ^* が存在して、次の一階の条件を満たす。

この問題では、もともと変数が 3 つあるので 1 階の条件は 3 つになります。

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = x_2^* x_3^* + 4\lambda^* = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = x_3^* x_1^* + 4\lambda^* = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*)}{\partial x_3} = x_1^* x_2^* + 4\lambda^* = 0$$

Step 3 : 1 階の条件と制約条件を連立させて解を求める

1 階の条件の 3 つの式を連立して λ^* を消去すると、

$$x_2^* x_3^* = x_3^* x_1^* = x_1^* x_2^* \quad x_1^* = x_2^* = x_3^*$$

となる。これを制約条件に代入して x_1^* だけの式にすると、

$$12x_1^* = 3 \quad \therefore x_1^* = 1/4$$

を得る。よって、内点解の候補として解法と同じ

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

が得られる。

問 16.5 : 経済学への応用

2 つの生産要素を使ってある製品を作る企業がある。第 1 生産要素を x_1 、第 2 生産要素を x_2 だけ投入するときの製品の生産量 y は次の生産関数で与えられる。

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} \times x_2^{\frac{1}{3}}$$

製品価格が 10、第 1 生産要素と第 2 生産要素の価格がそれぞれ 2 と 4 であるとき、

(1) 企業の利潤 π は x_1 と x_2 の関数になる。これを式で表せ。

解) 企業の利潤は売上収入から費用を引いたもので、売上収入は製品価格と生産量の積、費用はそれぞれの生産要素の価格と生産要素の投入量の積だから、

$$\begin{aligned} \pi &= 10 \times y - 2 \times x_1 - 4 \times x_2 \\ &= 10 \times x_1^{\frac{1}{3}} \times x_2^{\frac{1}{3}} - 2 \times x_1 - 4 \times x_2 \end{aligned}$$

(2) 利潤を最大化する投入量の組み合わせ (x_1^*, x_2^*) を求めよ。

解) 利潤を最大にする組み合わせ (x_1^*, x_2^*) は一階の条件を満たすから、

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = 10 \times \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{1/3} - 2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = 10 \times \frac{1}{3} x_1^{1/3} x_2^{-2/3} - 4 = 0$$

を満たす。この 2 つの条件式を解くと

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{125}{54}, \frac{125}{108} \right)$$

が唯一の解の候補として得られる。

2 階の条件を調べると、

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} = -\frac{20}{9} x_1^{-5/3} x_2^{1/3} < 0, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} = -\frac{20}{9} x_1^{1/3} x_2^{-5/3} < 0,$$

また、 $\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{10}{9} x_1^{-2/3} x_2^{-2/3}$ より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 &= \left(-\frac{20}{9} x_1^{-5/3} x_2^{1/3} \right) \left(-\frac{20}{9} x_1^{1/3} x_2^{-5/3} \right) - \left(\frac{10}{9} x_1^{-2/3} x_2^{-2/3} \right)^2 \\ &= \frac{400}{81} x_1^{-4/3} x_2^{-4/3} - \frac{100}{81} x_1^{-4/3} x_2^{-4/3} \\ &= \frac{300}{81} x_1^{-4/3} x_2^{-4/3} > 0 \end{aligned}$$

となり、極大点の2階の条件を全て満たすことがわかる。

1階と2階の条件では得られた候補

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{125}{54}, \frac{125}{108} \right)$$

以外の内点は最適内点解にはなりえない。端点解の可能性をチェックしてみよう。

得られた解における企業の利潤は

$$\pi = 10 \times \left(\frac{125}{54} \right)^{1/3} \times \left(\frac{125}{108} \right)^{1/3} - 2 \times \left(\frac{125}{54} \right) - 4 \times \left(\frac{125}{108} \right) = \frac{125}{27} > 0$$

でプラスである。

端点(いずれかの投入量が0の点)では売上収入は0になるので利潤がプラスになることはないから、端点が解になる可能性はない。

最後に、投入を増やしたときに利潤が増え続ける場合には最適解がないことになるが、与えられた生産関数では投入物の生産性は投入の増加とともに逓減するので、このようなことは起こり得ない。

よって、 $(125/54, 125/108)$ の投入の組み合わせが利潤を最適にする解であることがわかる。

発展問題

(3) 第1生産要素の価格が2から微小に ε だけ上昇するとき、 (x_1^*, x_2^*) はどのように変化するか。結果を予想してから実際に計算してみよう。

解) 第1生産要素の価格が最適投入量に与える影響を調べるために、第1生産要素の価格を未知数 w として最適解を求める。

$$\pi = 10 \times x_1^{1/3} \times x_2^{1/3} - w \times x_1 - 4 \times x_2$$

利潤を最大にする組み合わせ (x_1^*, x_2^*) は一階の条件を満たすから、

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = 10 \times \frac{1}{3} x_1^{*-2/3} x_2^{*1/3} - w = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = 10 \times \frac{1}{3} x_1^{*1/3} x_2^{*-2/3} - 4 = 0$$

を満たす。この2つの条件式を解くと

$$x_1^* = \frac{250}{27} w^{-2}, \quad x_2^* = \frac{125}{54} w^{-1}$$

が唯一の解として得られる（この解の最適性の確認は省略する）。

最適な投入量は w の関数（以下、投入関数と呼ぶ）となっているので、 w が変化したときの影響を分析できる。

第1生産要素の価格が2から微小に ε だけ上昇するときの最適投入量への影響を調べるために、 w に関する投入量の $w=2$ における各投入関数の微分係数を調べる。

まず、各投入関数を微分して導関数を求める。

$$\frac{dx_1^*}{dw} = -\frac{500}{27} w^{-3}, \quad \frac{dx_2^*}{dw} = -\frac{125}{54} w^{-2}$$

よって、 $w=2$ における各投入関数の微分係数は

$$\frac{dx_1^*}{dw} = -\frac{500}{27} \frac{1}{2^3} = -\frac{125}{54}, \quad \frac{dx_2^*}{dw} = -\frac{125}{54} \frac{1}{2^2} = -\frac{125}{216}$$

となる。微分係数は「独立変数（この場合 w ）が微小に変化したときに関数の値（この場合 x_1^*, x_2^* ）がその変化の何倍変化するか」を示している。この問題では w が微小に ε だけ変化した場合を考えるので、そのとき投入量はそれぞれ

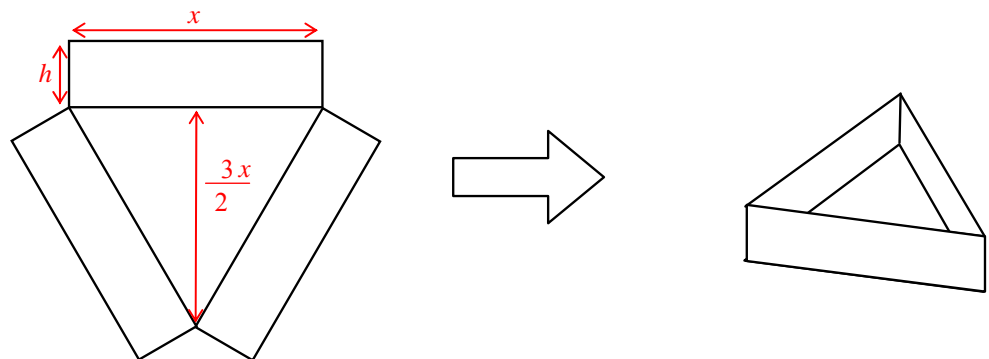
$$\Delta x_1^* = -\frac{125}{54} \varepsilon, \quad \Delta x_2^* = -\frac{125}{216} \varepsilon$$

だけ変化すると予想される。

テキストの略解では「ともに $-125 \varepsilon / 54$ だけ減少する」となっていますが、 x_2^* の変化は間違っていました。お詫びして訂正します。

問 16.6 : 応用問題

下図のように、鉄板で底の形が正三角形のフタのない箱を作る。鉄板の表面積が $a \text{ cm}^2$ であるような箱のうち、容積が最大になるものの高さを求めよ。



解) 底の形が正三角形の一辺の長さが x cm、箱の高さが h cm の箱の体積を V cm³ とすると、 V は x, h の 2 変数を独立変数とする関数になる。この関数を式で表すと、

$$V = \frac{1}{2}x \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot h$$

となる。

ここで、箱の表面積が a cm² であるという制約があるので、 x, h は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 3x \cdot h = a$$

を満たさなければならない。つまり、この問題は等号制約条件のある最大化問題

$$\max V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot h$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 3x \cdot h = a$$

である。

ラグランジュ乗数法を使って解く。

Step 1 : ラグランジュ関数を作る

変数 λ を導入して、新しい関数 $L(x, h, \lambda)$ を作る。

$$L(x, h, \lambda) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot h + \lambda \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 3x \cdot h - a \right)$$

等号制約条件を " $=0$ " の形に書き換えた式の左辺に λ をかけて、最大化する関数 V に足せばいいのです。

Step 2 : 1 階の条件を調べる

最適内点解を (x^*, h^*) とすると、ある λ^* が存在して、次の一階の条件を満たす。

$$\frac{\partial L(x^*, h^*, \lambda^*)}{\partial x} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^* \cdot h^* + \lambda^* \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^* + 3h^* \right) = 0,$$

$$\frac{\partial L(x^*, h^*, \lambda^*)}{\partial h} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^{*2} + \lambda^* \cdot 3x^* = 0,$$

Step 3 : 1 階の条件と制約条件を連立させて解を求める

1 階の条件の 2 つの式を連立して λ^* を消去すると、

それぞれ λ^* を含む項を右辺に移行して、上の式の両辺を下式の両辺で割れば λ^* が消える

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x^* \cdot h^*}{\frac{\sqrt{3}}{4}x^{*2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x^* + 3h^*}{3x^*} \quad x^* = \frac{6}{\sqrt{3}}h^*$$

となる。これを制約条件に代入して h^* だけの式にすると、

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{6}{\sqrt{3}} h^* \right)^2 + 3 \left(\frac{6}{\sqrt{3}} h^* \right) \cdot h^* = a$$

$$h^{*2} 9\sqrt{3} = a$$

$$h^{*2} = 3^{-\frac{5}{2}} \cdot a$$

$$\therefore h^* = 3^{-\frac{5}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$$

を得る。

ラグランジュ乗数法で得られる一階の条件は最適内点解が満たすべき必要条件なので、これ以外の内点が解になることはあり得ない。端点 (x と h のいずれかが 0 になる点) では体積が 0 になるので、端点が解になる可能性もない。よって、この解が最適な解であると言える。

問 16.7 : 経済学への応用

太郎と花子は 2 財の消費問題に直面している。太郎と花子の効用関数はそれぞれ以下のように与えられている。

$$\text{太郎: } u_T(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\text{花子: } u_H(x_1, x_2) = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2$$

ただし、 x_1 と x_2 はそれぞれ第 1 財と第 2 財の消費量である。以下の問いに答えよ。

(1) 第 1 財の価格が 3、第 2 財の価格が 6、予算が 54 であるとき、太郎と花子の効用を最大にするような消費の組合せをそれぞれ求めよ。

解) 太郎の問題は、

$$\max u_T(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$$

$$s.t. \quad 3x_1 + 6x_2 = 54$$

と書ける。

ラグランジュ乗数法を使って解く。

Step 1 : ラグランジュ関数を作る

変数 λ を導入して、新しい関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を作る。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2} + \lambda(3x_1 + 6x_2 - 54)$$

等号制約条件を " $=0$ " の形に書き換えた式の左辺に λ をかけて、最大化する関数 u_T に足せばいいのです。

Step 2 : 1 階の条件を調べる

最適内点解を (x_1^*, x_2^*) とすると、ある λ^* が存在して、次の一階の条件を満たす。

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{*-1/2} x_2^{*1/2} + 3\lambda^* = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = \frac{1}{2} x_1^{*1/2} x_2^{*-1/2} + 6\lambda^* = 0,$$

Step 3 : 1 階の条件と制約条件を連立させて解を求める

1 階の条件の 2 つの式を連立して λ^* を消去すると、

それぞれ λ^* を含む項を右辺に移行して、上の式の両辺を下の式の両辺で割れば λ^* が消える

$$\frac{x_1^{*-1/2} x_2^{*1/2}}{x_1^{*1/2} x_2^{*-1/2}} = \frac{3}{6} \quad x_1^* = 2x_2^*$$

となる。これを制約条件に代入して x_2^* だけの式にすると、

$$3(2x_2^*) + 6x_2^* = 54 \quad \therefore x_2^* = 9/2$$

を得る。よって、解は

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(9, \frac{9}{2}\right)$$

となる。

次に花子の問題は、

$$\max u_H(x_1, x_2) = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2$$

$$s.t. \quad 3x_1 + 6x_2 = 54$$

と書ける。

ラグランジュ乗数法を使って解く。やり方は太郎の場合とほとんど同じである。

Step 1 : ラグランジュ関数を作る

変数 λ を導入して、新しい関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を作る。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (x_1^{1/2} + x_2^{1/2})^2 + \lambda(3x_1 + 6x_2 - 54)$$

等号制約条件を " $= 0$ " の形に書き換えた式の左辺に λ をかけて、最大化する関数 u_H に足せばいいのです。

Step 2 : 1 階の条件を調べる

最適内点解を (x_1^*, x_2^*) とすると、ある λ^* が存在して、次の一階の条件を満たす。

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = 2(x_1^{*1/2} + x_2^{*1/2}) \cdot \frac{1}{2} x_1^{*-1/2} + 3\lambda^* = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = 2(x_1^{*1/2} + x_2^{*1/2}) \cdot \frac{1}{2} x_2^{*-1/2} + 6\lambda^* = 0,$$

花子の効用関数は $(\dots)^2$ の形になっているので、展開をしたくなるかもしれないが、あえて展開をせずに合成関数の微分を使って微分するのがポイントです。微分をした結果もあまり変形せずに次のステップに進みます。

Step 3 : 1 階の条件と制約条件を連立させて解を求める

1 階の条件の 2 つの式を連立して λ^* を消去すると、

それぞれ λ^* を含む項を右辺に移行して、上の式の両辺を下の式の両辺で割れば λ^* が消える

$$\frac{(x_1^{*1/2} + x_2^{*1/2}) \cdot x_1^{*-1/2}}{(x_1^{*1/2} + x_2^{*1/2}) \cdot x_2^{*-1/2}} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{x_2^{*1/2}}{x_1^{*1/2}} = \frac{3}{6}$$

$$x_1^{*1/2} = 2x_2^{*1/2}$$

$$x_1^* = 4x_2^*$$

となる。これを制約条件に代入して x_2^* だけの式にすると、

$$3(4x_2^*) + 6x_2^* = 54 \quad \therefore x_2^* = 3$$

を得る。よって、解は

$$(x_1^*, x_2^*) = (12, 3)$$

となる。

(2) 第 1 財の価格が p_1 、第 2 財の価格が p_2 、予算が M であるとき、太郎と花子の効用を最大にするような消費の組合せを (p_1, p_2, M) の関数として求めよ。

解) 太郎の問題は、

$$\max u_T(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$$

$$s.t. \quad p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = M$$

と書ける。

ラグランジュ乗数法を使って解く。

Step 1 : ラグランジュ関数を作る

変数 λ を導入して、新しい関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を作る。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2} + \lambda(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - M)$$

等号制約条件を " $= 0$ " の形に書き換えた式の左辺に λ をかけて、最大化する関数 u_T に足せばいいのです。

Step 2 : 1 階の条件を調べる

最適内点解を (x_1^*, x_2^*) とすると、ある λ^* が存在して、次の一階の条件を満たす。

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{*-1/2} x_2^{*1/2} + p_1 \cdot \lambda^* = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = \frac{1}{2} x_1^{*1/2} x_2^{*-1/2} + p_2 \cdot \lambda^* = 0,$$

Step 3 : 1 階の条件と制約条件を連立させて解を求める

1 階の条件の 2 つの式を連立して λ^* を消去すると、

それぞれ λ^* を含む項を右辺に移行して、上の式の両辺を下式の両辺で割れば λ^* が消える

$$\frac{x_1^{*-1/2} x_2^{*1/2}}{x_1^{*1/2} x_2^{*-1/2}} = \frac{p_1}{p_2} \quad x_1^* = \frac{p_2}{p_1} x_2^*$$

となる。これを制約条件に代入して x_2^* だけの式にすると、

$$p_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} x_2^* \right) + p_2 \cdot x_2^* = M \quad \therefore x_2^* = \frac{M}{2p_2}$$

を得る。よって、解は

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{M}{2p_1}, \frac{M}{2p_2} \right)$$

となる。

次に花子の問題は、

$$\max u_H(x_1, x_2) = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2$$

$$s.t. \quad p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = M$$

と書ける。

ラグランジュ乗数法を使って解く。やり方は太郎の場合とほとんど同じである。

Step 1 : ラグランジュ関数を作る

変数 λ を導入して、新しい関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を作る。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (x_1^{1/2} + x_2^{1/2})^2 + \lambda(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - M)$$

等号制約条件を " $= 0$ " の形に書き換えた式の左辺に λ をかけて、最大化する関数 u_H に足せばいいのです。

Step 2 : 1 階の条件を調べる

最適内点解を (x_1^*, x_2^*) とすると、ある λ^* が存在して、次の一階の条件を満たす。

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = 2(x_1^{*1/2} + x_2^{*1/2}) \cdot \frac{1}{2} x_1^{*-1/2} + p_1 \cdot \lambda^* = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = 2(x_1^{*1/2} + x_2^{*1/2}) \cdot \frac{1}{2} x_2^{*-1/2} + p_2 \cdot \lambda^* = 0,$$

花子の効用関数は $(\dots)^2$ の形になっているので、展開をしたくなるかもしれないが、あえて展開をせずに合成関数の微分を使って微分するのがポイントです。微分をした結果もあまり変形せずに次のステップに進みます。

Step 3 : 1 階の条件と制約条件を連立させて解を求める

1 階の条件の 2 つの式を連立して λ^* を消去すると、

それぞれ λ^* を含む項を右辺に移行して、上の式の両辺を下の式の両辺で割れば λ^* が消える

$$\frac{(x_1^{*1/2} + x_2^{*1/2}) \cdot x_1^{*-1/2}}{(x_1^{*1/2} + x_2^{*1/2}) \cdot x_2^{*-1/2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{x_2^{*1/2}}{x_1^{*1/2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_1^{*1/2} = \frac{p_2}{p_1} 2x_2^{*1/2}$$

$$x_1^* = \frac{p_2^2}{p_1^2} 4x_2^*$$

となる。これを制約条件に代入して x_2^* だけの式にすると、

$$p_1 \cdot \left(\frac{p_2^2}{p_1^2} x_2^* \right) + p_2 \cdot x_2^* = M \quad \therefore x_2^* = \frac{M}{p_2} \frac{p_1}{p_1 + p_2}$$

を得る。よって、解

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{M}{p_1} \frac{1}{1 + p_1/p_2}, \frac{M}{p_2} \frac{1}{1 + p_2/p_1} \right) \quad \text{あるいは} \quad \left(\frac{M}{p_1} \frac{p_2}{p_1 + p_2}, \frac{M}{p_2} \frac{p_1}{p_1 + p_2} \right)$$

を得る。

解説：(1)と(2)はほとんど同じ計算なので、面倒くさいと感じた人も多いでしょう。その「面倒くさい」という感覚はとても大事で、それを追求していくと、もっと無駄のない効果的な方法が見つかります。実際、(1)と(2)は同じように見えますが、(2)の方がより一般的な問題になっています。(2)を先に解いて答を求めてしまえば、(1)の答はそれに $p_1=3, p_2=6, M=54$ を代入するだけで得られてしまいます。一般的な答を先に求めてしまえば、それを使って具体的なものは簡単に求められます。学者が具体的な議論をなるべく一般化しようとするのはこのためです。一般的な事実を見つければ、それを色々なものに応用できるのです。

(3) (1)の状態 (すなわち、 $(p_1, p_2, M) = (3, 6, 54)$ の状態) から、第 1 財の価格 p_1 だけが微小に ε だけ上昇するとき、太郎と花子の消費の組み合わせはそれぞれどれだけ変化するか。

解)2)で得られた最適な消費量は価格と予算 (p_1, p_2, M) の3変数関数(経済学ではこれを需要関数と呼びます)となっている。第1財の価格が微小に上昇するときの最適消費量への影響を調べるためには、 $(p_1, p_2, M) = (3, 6, 54)$ における各需要関数の p_1 に関する偏微分係数を調べればよい。

(A) 太郎の消費への影響

まず、各需要関数を偏微分して偏導関数を求める。

$$\text{第1財の消費量} : \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\frac{M}{2p_1} \right) = -\frac{M}{2p_1^2}$$

$$\text{第2財の消費量} : \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\frac{M}{2p_2} \right) = 0$$

解説：第2財の消費量は第1財の関係とは無関係に決まるので、第1財の価格に関する偏微分係数の値は常に0となります。

よって、 $(p_1, p_2, M) = (3, 6, 54)$ における各需要関数の p_1 に関する偏微分係数は

$$\text{第1財の消費量} : \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = -\frac{54}{2 \times 3^2} = -3$$

$$\text{第2財の消費量} : \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = 0$$

となる。偏微分係数は「独立変数(この場合 p_1)が微小に変化したときに関数の値(この場合 x_1^*, x_2^*)がその変化の何倍変化するか」を示している。この問題では p_1 が微小に ε だけ変化した場合を考えるので、そのとき最適消費量はそれぞれ

$$\Delta x_1^* = -3\varepsilon, \quad \Delta x_2^* = 0$$

だけ変化すると予想される(第2財の消費量は変化しない)。

(B) 花子の消費への影響

まず、各需要関数を偏微分して偏導関数を求める。

$$\text{第1財の消費量} : \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\frac{M}{p_1} \frac{p_2}{p_1 + p_2} \right) = -\frac{Mp_2(2p_1 + p_2)}{p_1^2(p_1 + p_2)^2}$$

$$\text{第2財の消費量} : \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\frac{M}{p_2} \frac{p_1}{p_1 + p_2} \right) = \frac{M}{p_2} \frac{p_2}{(p_1 + p_2)^2} = \frac{M}{(p_1 + p_2)^2}$$

よって、 $(p_1, p_2, M) = (3, 6, 54)$ における各需要関数の p_1 に関する偏微分係数は

$$\text{第1財の消費量} : \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = -\frac{54 \times 6 \times (2 \times 3 + 6)}{3^2 \times (3 + 6)^2} = -\frac{16}{3}$$

$$\text{第2財の消費量} : \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = \frac{54}{(3+6)^2} = \frac{2}{3}$$

となる。偏微分係数は「独立変数（この場合 p_1 ）が微小に変化したときに関数の値（この場合 x_1^*, x_2^* ）がその変化の何倍変化するか」を示している。この問題では p_1 が微小に ε だけ変化した場合を考えるので、そのとき最適消費量はそれぞれ

$$\Delta x_1^* = -\frac{16}{3}\varepsilon, \quad \Delta x_2^* = \frac{2}{3}\varepsilon$$

だけ変化すると予想される。

問 16.8 : 経済学への応用

以下の効用最大化問題を解け。(1)(2)(3)の結果を比較して、比較結果の理由を考察してみよう。ただし、 x_i は第 i 財の消費量、 p_i は第 i 財の価格、 M は予算であり、価格と予算はともに正とする。

$$(1) \quad \begin{aligned} \max u(x_1, x_2) &= x_1^a x_2^b \\ \text{s.t. } p_1 x_1 + p_2 x_2 &= M, \quad a, b > 0 \end{aligned}$$

解説 : Cobb-Douglas 型の一般的な効用関数のケース。問 16.7 の太郎がその一例

解) ラグランジュ乗数法を使って解く。

Step 1 : ラグランジュ関数を作る

変数 λ を導入して、新しい関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を作る。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^a \cdot x_2^b + \lambda(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - M)$$

等号制約条件を " $=0$ " の形に書き換えた式の左辺に λ をかけて、最大化する効用関数に足せばいいのです。

Step 2 : 1 階の条件を調べる

最適内点解を (x_1^*, x_2^*) とすると、ある λ^* が存在して、次の一階の条件を満たす。

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = a \cdot x_1^{*a-1} x_2^{*b} + p_1 \cdot \lambda^* = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = b \cdot x_1^{*a} x_2^{*b-1} + p_2 \cdot \lambda^* = 0,$$

Step 3 : 1 階の条件と制約条件を連立させて解を求める

1 階の条件の 2 つの式を連立して λ^* を消去すると、

それぞれ λ^* を含む項を右辺に移行して、上の式の両辺を下式の両辺で割れば λ^* が消える

$$\frac{a \cdot x_1^{*a-1} x_2^{*b}}{b \cdot x_1^{*a} x_2^{*b-1}} = \frac{p_1}{p_2} \quad x_1^* = \frac{a \cdot p_2}{b \cdot p_1} x_2^*$$

となる。これを制約条件に代入して x_2^* だけの式にすると、

$$p_1 \cdot \left(\frac{a \cdot p_2}{b \cdot p_1} x_2^* \right) + p_2 \cdot x_2^* = M \quad \therefore x_2^* = \frac{b}{a+b} \frac{M}{p_2}$$

を得る。よって、解は

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{a}{a+b} \frac{M}{p_1}, \frac{b}{a+b} \frac{M}{p_2} \right)$$

となる。

$$(2) \quad \begin{aligned} \max u(x_1, x_2) &= a \ln x_1 + b \ln x_2 \\ \text{s.t. } p_1 x_1 + p_2 x_2 &= M, \quad a, b > 0 \end{aligned}$$

解説：見た目はだいぶ違うが実はこの関数は (1) の Cobb-Douglas 型の効用関数の対数をとったものです。実際、この効用関数を対数の性質を使って書き換えると $\ln x_1^a x_2^b$ となります。対数をとることで、効用の値 (嬉しさや満足度と解釈されます) は異なりますが、結果として出てくる消費行動は(1)と(2)とで全く同じ結果になります。このことを確認しましょう。

解) ラグランジュ乗数法を使って解く。

Step 1 : ラグランジュ関数を作る

変数 λ を導入して、新しい関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を作る。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = a \ln x_1 + b \ln x_2 + \lambda(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - M)$$

等号制約条件を " $= 0$ " の形に書き換えた式の左辺に λ をかけて、最大化する効用関数に足せばいいのです。

Step 2 : 1 階の条件を調べる

最適内点解を (x_1^*, x_2^*) とすると、ある λ^* が存在して、次の一階の条件を満たす。

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = a \cdot x_1^{*-1} + p_1 \cdot \lambda^* = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = b \cdot x_2^{*-1} + p_2 \cdot \lambda^* = 0,$$

Step 3 : 1 階の条件と制約条件を連立させて解を求める

1 階の条件の 2 つの式を連立して λ^* を消去すると、

それぞれ λ^* を含む項を右辺に移行して、上の式の両辺を下式の両辺で割れば λ^* が消える

$$\frac{a \cdot x_1^{*-1}}{b \cdot x_2^{*-1}} = \frac{p_1}{p_2} \quad x_1^* = \frac{a \cdot p_2}{b \cdot p_1} x_2^*$$

となる。これを制約条件に代入して x_2^* だけの式にすると、

$$p_1 \cdot \left(\frac{a \cdot p_2}{b \cdot p_1} x_2^* \right) + p_2 \cdot x_2^* = M \quad \therefore x_2^* = \frac{b}{a+b} \frac{M}{p_2}$$

を得る。よって、解は

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{a}{a+b} \frac{M}{p_1}, \frac{b}{a+b} \frac{M}{p_2} \right)$$

となる。

解説：同じ結果になりましたね。どうして効用関数が変わったのに、最適な消費の組み合わせは変わらないのでしょうか。これは消費選択で重要なのは絶対的な望ましさではなくて、相対的な望ましさだからです。Aという選択とBという選択のどちらを選ぶかというとき、「Aの望ましさが100でBの望ましさが50」の人はAを選びます。「Aの望ましさがln100でBの望ましさがln50」という人も同じくAを選びます。効用関数全体の自然対数をとっても、自然対数関数は単調増加関数なので相対的な望ましさは変わりません。実際、最適消費点を通る(1)の人の無差別曲線と(2)の人の無差別曲線は全く同じになります。無差別曲線が同じなので、好みも同じなのです。

$$(3) \quad \begin{aligned} \max u(x_1, x_2, x_3) &= x_1^a x_2^b x_3^c \\ \text{s.t.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 &= M, \quad a, b, c > 0 \end{aligned}$$

解説：財の数が3つの一般的Cobb-Douglas型効用関数のケース。

解) ラグランジュ乗数法を使って解く。

Step 1 : ラグランジュ関数を作る

変数 λ を導入して、新しい関数 $L(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ を作る。

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^a \cdot x_2^b \cdot x_3^c + \lambda(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 - M)$$

等号制約条件を " $=0$ " の形に書き換えた式の左辺に λ をかけて、最大化する効用関数に足せばいいのです。

Step 2 : 1階の条件を調べる

最適内点解を (x_1^*, x_2^*, x_3^*) とすると、ある λ^* が存在して、次の一階の条件を満たす。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*)}{\partial x_1} &= a \cdot x_1^{*a-1} x_2^{*b} x_3^{*c} + p_1 \cdot \lambda^* = 0, \\ \frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*)}{\partial x_2} &= b \cdot x_1^{*a} x_2^{*b-1} x_3^{*c} + p_2 \cdot \lambda^* = 0, \\ \frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*)}{\partial x_3} &= c \cdot x_1^{*a} x_2^{*b} x_3^{*c-1} + p_3 \cdot \lambda^* = 0 \end{aligned}$$

Step 3 : 1階の条件と制約条件を連立させて解を求める

Step 2 で得られて全ての式は次のように書きかえられる。

$$\begin{aligned} \frac{a}{p_1 \cdot x_1^*} &= -\frac{\lambda^*}{x_1^{*a} x_2^{*b} x_3^{*c}}, \\ \frac{b}{p_2 \cdot x_2^*} &= -\frac{\lambda^*}{x_1^{*a} x_2^{*b} x_3^{*c}}, \\ \frac{c}{p_3 \cdot x_3^*} &= -\frac{\lambda^*}{x_1^{*a} x_2^{*b} x_3^{*c}} \end{aligned}$$

ここで右辺はすべての共通のなので、3つの式の左辺はすべて等しくなければならない。すなわち

$$\frac{p_1 \cdot x_1^*}{a} = \frac{p_2 \cdot x_2^*}{b} = \frac{p_3 \cdot x_3^*}{c} \quad \dots$$

この式を使って x_1^* だけの式にすると、

$$p_1 \cdot x_1^* + \frac{b}{a} p_1 \cdot x_1^* + \frac{c}{a} p_1 \cdot x_1^* = M \quad \therefore x_1^* = \frac{a}{a+b+c} \frac{M}{p_1}$$

を得る。よって、解は

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(\frac{a}{a+b+c} \frac{M}{p_1}, \frac{b}{a+b+c} \frac{M}{p_2}, \frac{c}{a+b+c} \frac{M}{p_3} \right)$$

となる。

解説：財の数が3つになってことで、一般的 Cobb-Douglas 型効用関数から導かれる最低消費量の性質が見やすくなっています。式をよく見てください。この式は各財への支出の比率が Cobb-Douglas 型効用関数の累乗の指数の比 $a:b:c$ にならなければならないことを意味します。この性質を知っていれば最適な消費量は簡単に導くことができます。難しい公式を意味もわからずに丸暗記しても役に立ちませんが、よく理解したうえで鍵となる重要な性質を覚えておくのはとても賢い知恵です。そういう賢い知恵を数学から学びましょう。

$$(4) \quad \max u(x_1, x_2) = (\beta_1 x_1^\alpha + \beta_2 x_2^\alpha)^{1/\alpha}$$

$$\text{s.t. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = M, \quad \beta_1, \beta_2 > 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha < 1$$

解説：CES 型の一般的な効用関数のケース。問 16.7 の花子はその一例

解) ラグランジュ乗数法を使って解く。

Step 1 : ラグランジュ関数を作る

変数 λ を導入して、新しい関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を作る。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (\beta_1 x_1^\alpha + \beta_2 x_2^\alpha)^{1/\alpha} + \lambda(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - M)$$

等号制約条件を " $=0$ " の形に書き換えた式の左辺に λ をかけて、最大化する効用関数に足せばいいのです。

Step 2 : 1 階の条件を調べる

最適内点解を (x_1^*, x_2^*) とすると、ある λ^* が存在して、次の一階の条件を満たす。

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = \frac{1}{\alpha} (\beta_1 x_1^{*\alpha} + \beta_2 x_2^{*\alpha})^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot \alpha \beta_1 x_1^{*\alpha-1} + p_1 \cdot \lambda^* = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = \frac{1}{\alpha} (\beta_1 x_1^{*\alpha} + \beta_2 x_2^{*\alpha})^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot \alpha \beta_2 x_2^{*\alpha-1} + p_2 \cdot \lambda^* = 0,$$

偏微分をした結果をあまり変形せずに次のステップに進みます。

Step 3 : 1 階の条件と制約条件を連立させて解を求める

1 階の条件の 2 つの式を連立して λ^* を消去すると、

それぞれ λ^* を含む項を右辺に移行して、上の式の両辺を下式の両辺で割れば λ^* が消える。

$$\frac{(\beta_1 x_1^{*\alpha} + \beta_2 x_2^{*\alpha})^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot \beta_1 x_1^{*\alpha-1}}{(\beta_1 x_1^{*\alpha} + \beta_2 x_2^{*\alpha})^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot \beta_2 x_2^{*\alpha-1}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{\beta_1 x_1^{*\alpha-1}}{\beta_2 x_2^{*\alpha-1}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_1^{*\alpha-1} = \frac{p_1 \beta_2}{p_2 \beta_1} x_2^{*\alpha-1}$$

$$x_1^* = \left(\frac{p_1 \beta_2}{p_2 \beta_1} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} x_2^*$$

となる。これを制約条件に代入して x_2^* だけの式にすると、

$$p_1 \cdot \left(\frac{p_1 \beta_2}{p_2 \beta_1} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} x_2^* + p_2 \cdot x_2^* = M$$

$$p_2 \cdot x_2^* \left[\frac{p_1}{p_2} \cdot \left(\frac{p_1 \beta_2}{p_2 \beta_1} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + 1 \right] = M$$

$$\therefore x_2^* = \frac{M}{p_2 \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \cdot \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + 1 \right]}$$

を得る。よって、解は

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{M}{p_1 \left[(p_2/p_1)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \cdot (\beta_1/\beta_2)^{\frac{1}{\alpha-1}} + 1 \right]}, \frac{M}{p_2 \left[(p_1/p_2)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \cdot (\beta_2/\beta_1)^{\frac{1}{\alpha-1}} + 1 \right]} \right)$$

となる。

テキストの略解が誤っていました。マイナス符号が2箇所ありますが、いずれもプラス符号の誤りです。お詫びして訂正します。

解説: Cobb - Douglas 型効用関数は簡単で扱いやすいので経済学者は頻繁にこの関数を使うが、Cobb - Douglas 型効用関数を仮定すると、ある財の最適消費量に他の財の価格は影響を与えない。しかし実際には牛肉の値上げは豚肉の消費量に影響を与える(通常はプラス効果)し、高速道路料金の値上げはガソリンの消費量に影響を与える(通常はマイナス効果)。そのような影響を分析するには Cobb-Douglas 型効用関数は使えない。そこで経済学者が変わりに使うのが CES 関数である。CES 型関数では財の代替・補完関係を表現することができる。定数 α の値がプラスならば第 1 財と第 2 財は互いに代替財、マイナスならば補完財になる。

応用経済分析では CES 型関数がしばしば登場するが、CES 型は Cobb - Douglas 型と比べて複雑で扱い方を間違えると計算が複雑になりすぎて、手におえなくなる。扱い方で特に注意したい点は次の 3 つ。

関数が簡単にできる場合も簡単にせずに、合成関数の微分法を使って偏微分する。

偏微分した結果も定数以外は整理せずに、そのまま λ^* を消去する。

価格 p_1, p_2 をなるべく価格比 p_1/p_2 にまとめて計算を進める。

コツをつかんで、高度な経済分析が理解できるようになりましょう。

問 16.9 : 発展問題(ラグランジュの定理の証明)

以下のように一般的な等号制約条件のある最大化問題が与えられている。

$$\max_{(x_1, x_2)} f(x_1, x_2) \quad s.t. \quad g(x_1, x_2) = 0$$

この問題の最適内点解を (x_1^*, x_2^*) とする。内点解の近傍では x_1 と x_2 の間に関数関係 (陰関数) が存在するものとする。このとき、

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \lambda^* \cdot \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + \lambda^* \cdot \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0$$

を満たすような実数 λ^* が存在することを証明せよ。

証明) 制約条件 $g(x_1, x_2) = 0$ を満たす x_1 と x_2 の間には関数関係 (陰関数) が存在するので、この関数を $x_2 = \varphi(x_1)$

とする。内点解ももちろん制約条件を満たすので、

$$x_2^* = \varphi(x_1^*)$$

である。

内点解 (x_1^*, x_2^*) から制約条件を満たしながら微小に x_1 を変化させると x_2 の値は関数 φ に従って変化するので、制約条件を前提にすると内点解 (x_1^*, x_2^*) の近傍では目的関数 f は 1 変数 x_1 のみの関数になっていて、その値を y とするとその式は

$$y = f(x_1, \varphi(x_1))$$

と書ける。

内点解 x_1^* では最大化の一階の条件が成り立たなければならないから、

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} \{f(x_1, \varphi(x_1))\} = 0 \quad \text{一階の条件}$$

となっていないなければならない。合成関数の微分を使って注意深く微分をすると、

$$\frac{d}{dx_1} \{f(x_1, \varphi(x_1))\} = \frac{\partial f(x_1, \varphi(x_1))}{\partial x_1} \cdot 1 + \frac{\partial f(x_1, \varphi(x_1))}{\partial x_2} \cdot \frac{d\varphi(x_1)}{dx_1}$$

↑これは関数 f の第 2 独立変数に関する偏導関数を意味します。

ここで陰関数定理より

$$\frac{d\varphi(x_1)}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}} \quad \text{ただし} \quad \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} \neq 0 \quad \text{陰関数} \varphi \text{ が存在する場合、これが前提となる。}$$

が成り立つから、

$$\frac{d}{dx_1} \{f(x_1, \varphi(x_1))\} = \frac{\partial f(x_1, \varphi(x_1))}{\partial x_1} - \frac{\partial f(x_1, \varphi(x_1))}{\partial x_2} \cdot \frac{\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}}$$

となる。内点解 (x_1^*, x_2^*) では一階の条件よりこれが0にならなければならないので、

$$\frac{\partial f(x_1^*, \varphi(x_1^*))}{\partial x_1} - \frac{\partial f(x_1^*, \varphi(x_1^*))}{\partial x_2} \cdot \frac{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}}{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}} = 0 \quad \dots$$

$\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} \neq 0$ の場合、式から

$$\frac{\frac{\partial f(x_1^*, \varphi(x_1^*))}{\partial x_1}}{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial f(x_1^*, \varphi(x_1^*))}{\partial x_2}}{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}}$$

を得る。この両辺の値を λ^* とすると

$$\frac{\partial f(x_1^*, \varphi(x_1^*))}{\partial x_1} + \lambda^* \cdot \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1^*, \varphi(x_1^*))}{\partial x_2} + \lambda^* \cdot \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0$$

さらに $x_2^* = \varphi(x_1^*)$ だから

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \lambda^* \cdot \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + \lambda^* \cdot \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0$$

が成り立つ。よって題意を満たす λ^* は存在する。

$\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0$ の場合、式から

$$\frac{\partial f(x_1^*, \varphi(x_1^*))}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0$$

となる。ここで、

$$\lambda^* = \frac{\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}}{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}}$$

とすると、

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + \lambda^* \cdot \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0$$

が成り立ち、かつ

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0$$

だから、

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \lambda^* \cdot \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0$$

も成り立つ。よってこの場合も題意を満たす λ^* は存在する。

証明終わり

解説) ここでは陰関数として、 x_2 が x_1 の関数になっていると仮定して議論したが、 $g(x_1, x_2) = 0$ を満たす点 (x_1, x_2) の軌跡が垂直または水平の傾きを持たなければ、関数関係を逆にしてもよい。

この問題では x_2 が x_1 の関数になっていると仮定したので、 $g(x_1, x_2) = 0$ を満たす点の軌跡が垂直になっていることを排除した。もしも垂直になっているのであれば、 x_1 が x_2 の関数になっているとして議論をしなければならない(細かいことなので証明ではこの点については省略した)。

さて、途中から と した場合分けしたのは、分母が0になる分数は定義できないため、そのようなケースを特別扱いする必要があるからである。実はこのケースは $g(x_1, x_2) = 0$ を満たす点の軌跡が水平になっているケースに対応している。証明では、そのようなケースでも一階の条件を満たす λ^* が存在することが示されていることを確かめよう。

以上