この問題はお菓子メーカーが製品容器の形を決める際などに応用できるものです。このような応用問題はどのように解けばよいでしょうか？ 問題を解く鍵は以下の作業ができるかどうかにかかっています。

1 変数最適化の応用問題を解く鍵

最大または最小にしたい変数と選択すべき変数との関係を関数式で表す。

この場合，最大にしたいのは「容積」です。一方，選択すべき変数は「切り取る正方形の辺の長さ」とするのがよいでしょう。容積を $y$cm^3，切り取る正方形の辺の長さを $x$cm とすると，y は x の関数であり，その関数式は

$$y = x(60 - 2x)^2 \qquad (0 < x < 30)$$

となります。一辺が x の正方形を切り取ると容器の底は一辺が $60 - 2x$ cm の正方形になります。容器の体積は「底面の面積×高さ」なので上の式となるのです。ここで x はどんな数でもよいわけではありません。当然，正の数でなければ箱になりません。また，一辺が 30cm 以上の正方形を切り取ることは不可能です。だから 0 より大きく 30 より小さい区間が定義域となるのです。

このあとの~~回答~~解答の手順は計算問題と同じです。

Step 1：微分して導関数を求める。

$$y' = (60 - 2x)^2 - \overset{4}{\cancel{2}}x(60 - 2x) = (60 - 2x)(60 - \overset{6}{\cancel{4}}x)$$

Step 2：導関数の値（微分係数）がゼロになるような x の値を探す。

$$(60 - 2x)(60 - \overset{6}{\cancel{4}}x) = 0$$

となる x を探します。ここで x は 30 より小さいので，最初の括弧は常に正でゼロになることはありません。つまり導関数の値が 0 となるのは 2 つめの括弧 $(60 - \underset{6}{\cancel{4}}x)$ の値が 0 となるときだけです。そのときの x の値は ~~15~~ 10 ですね。

Step 3：Step 2 の x の値を頼りに増減表を書く。

$x = \underset{10}{\cancel{15}}$ を境にして傾きがどのように変化するかを調べます。

$0 \leq x < \underset{10}{\cancel{15}}$ の区間では，導関数の 2 つの括弧の数字がともに正になるので導関数の符号は正になり，関数グラフが右上がりであることがわかります。

一方，$\underset{10}{\cancel{15}} < x < 30$ の区間では微分係数が必ず負になり，グラフは右下がりになるはずです。この結果を増減表にまとめると，次のようになります。

x	0	…	~~15~~ 10	…	30
y'	＋	＋	0	−	0
y	0	↗	~~13500~~ 16000	↘	0

Step 4：グラフの大まかな形を描いて解を求める

関数のグラフは図 9-2 のようになるので，容器を最大にするには，一辺 ~~15~~ 10cm の正方形を切り取ればよく，そのとき容積は 1 万~~3500~~ 6000cm^3 となります。

増減表の情報だけだと，図 9-2A のような形までしかわかりませんが，関数が 3 次関数であり，$x = 30$ のときにも微分係数がゼロになることに注意すると，図 9-2B のような形になることもわかります。もちろん，解答を導くには A のグラフで十分です。

■図9-2　箱の容積と切り取る正方形の一辺の長さの関係