

拙著をご覧いただきありがとうございます。

関数解析は、微分積分学の情報処理機能の守備範囲を一般のベクトル空間に広げることに成功した体系です。舞台 (ベクトル空間) や登場人物 (内積やノルム) を上手に選ぶことによって様々なシナリオを自由に描くことができ、また、その柔軟性故に様々な問題を解決するための強力な味方になってくれます。こんな宝物を工学 (を含む科学技術全般) に応用しない手はありません。

実際に、関数解析的な考え方は工学の多くの重要な問題解決に欠かせない存在になってきています。例えば、図書館で IEEE Transactions on Signal Processing や IEEE Transactions on Image Processing などの国際学術誌を手にとりいただければ、すぐに気がつくことですが、筆者の専門分野 (信号処理工学) をはじめ、情報工学の多くの分野の先端研究では、今や関数解析的な考え方が当たり前のように使われています。これらの研究現場では、情報工学、電子工学、制御工学、情報科学、統計学など応用科学分野の他にも、数学や物理学など様々な分野を出身とする研究者によって新しいアイデアが日々発信されています。数学と工学の壁など何とも思わない大勢の研究者が腕試しする場になっており、そういう場で磨かれた革新的なアイデアが続々と生まれ、現代の先端技術を支えているのです。ところが、関数解析の基本的な考え方に触れたことのない工学者がそのような論文を読むとほんの僅かな抽象的な議論が理解を阻み、「無味乾燥な数学の議論が続いた後、突然、信号処理や画像処理の応用例としてグラフや画像がでてくるけど、結果だけを見るとすごくよさそうだ。」といった印象だけが残し、アイデアの本質を掴むことが困難になります。多くの工学者が抱いている (実はほんの僅かな) 壁の存在はとても残念なことにように思います。

実は、日本には数多くの素晴らしい関数解析の本が出版されています。ところが、それらのほとんどは数学科の学部 3 年以降のカリキュラムに準拠するように書かれており、前提となる項目のトレーニングに多くの時間を割けない工学系の学生の独習や工学系の大学のカリキュラムの中でテキストとして、そのまま利用することは大変困難です (筆者自身も苦労しました)。

本書は関数解析の基本的な考え方を体得し、これを応用できるようになることを願う読者 (勿論、工学分野の方に限りません) の一助になるよう以下のように多くの工夫をしています。

1. 関数解析の学習は「自転車修行 (1.1 節御参照)」のように辛くはありません。存分に楽しんでいただければと思います。筆者は一筋の物語として把握することにより、個々の議論の位置付けを明確に理解し、頭の中に関数解析の地図が描けるようになることが学習の目標だと思っています。関数解析の面白さと有効性を実感していただくために、実数の連続性からスタートし、距離空間やノルム空間の位相の基本的な考え方を紹介し、線形関数解析の至玉の定理 (一様有界性の定理、バナッハ・シュタインハウスの定理、開写像定理、閉グラフ定理、射影定理、リースの表現定理、ハーン・バナッハの定理) や非線形関数解析の基本操作 (ガトー微分、フレッシュ微分) とそれらの応用 (一般逆写像の理論や凸最適化理論など) までを一筋の物語としてすっきりと提示することを目標にしました。限られた頁数に収めるためにいくつもの工夫をしています。例えば、6 章では必ずしも完備でない内積空間の線形汎関数の正体を見つけていく話の中で内積空間の完備化のアイデアが同時に理解できるようにしています。
2. 「収束」の議論は、ほとんど例外なく「実数列の収束の概念」が基本になっています。また、関数解析の物語の舞台はベクトル空間になります。このため、1 章では微分積分や線形代数で学んだ基本的な概念を見直し、正確に理解することを目標にしています。付録には関数解析の前提となる基本的な内容をまとめています。
3. 関数解析的な考え方を使いこなすには、議論の動機やポイントを正確に理解しておく必要があります。それには、具体的な例を調べて議論を再現してみることに他に、やはり、証明を味わうことが大切です。証明中の説明の仕方についても、研究室の学生諸君の感想を参考にしながら、できるだけ丁寧な解説を心がけました。読者の方には証明を形式的に追うのではなく、「証明の全体のストーリー」を把握することを第 1 目標にし、続いて、「なぜ、このような細かなことに気を使う必要があるのか」といった自然な疑問に対する答えを探るような気持ちで読み解いていただければ幸いです。
4. 校正の過程で見逃してしまった不注意な記述、誤植がございました。添付リスト (pp.3-4) のように訂正し、お詫び申し上げます。なお、訂正リストは随時更新してまいります。よろしくお願い申し上げます。

5. 本書の発行以来、多くの熱心な読者の方から章末問題の解答に関するお問い合わせをいただきました。「章末問題の解説・ヒント」は2010年春に公開する予定でしたが、多くの読者の要望になるべく早く応えられるように、このたび、「章末問題の解説・ヒント」(pp.5-27)を纏め、公開できる運びになりました(一つの解答方針を提示しているに過ぎませんが、読者が学習される際のヒントになれば幸いです)。丁寧な説明を心がけましたが、形式的な議論で済むものや、既に説明済みの議論と類似の議論で済む一部の問題については解説を省略しています。この解説が読者の皆様の学習の糧になることを祈念しています。

2009年12月10日

山田功

1 工学のための関数解析：訂正リスト (Oct 28, 2011 版)

頁, 位置	修正前 【補足】	修正後 【補足】
第 1 章扉の頁	ニール・アームストロングが語った月面への第一歩に際しての言葉	月面への第一歩に際してニール・アームストロングが語った言葉
第 1 章扉の頁	本章の第一歩を	本書の第一歩を
p.7, 下から 4 行目	走り抜けられていること」	走り抜けられること」
p.10, 2 行	(b)	(c)
p.17, 6 行	$\boldsymbol{x} := (x_1, \cdots, x_n)$	$\boldsymbol{x} := (x_1, \cdots, x_N)$
p.17, (d)	正整数 p に対して	実数 $p(\geq 1)$ に対して
p.19, (e)	$\boldsymbol{y} := (y_1, y_2, \cdots) \in l^\infty$	$\boldsymbol{y} := (y_1, y_2, \cdots), \boldsymbol{z} := (z_1, z_2, \cdots) \in l^\infty$
p.21, 定義 2.2(c)	これを「間引いて定義される新しい点列」を	これを間引いて定義される「新しい点列」を
p.25, 定理 2.1(b)	$d : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$	$d_p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$
p.28, $[(D_3)$ の確認]	まず, 2 つの実数 $p, q > 1$ が,	$p = 1$ の場合には, 式 (2.18) と (D_3) の成立は直ちに確認できるので, $p > 1$ の場合を考える. まず, 2 つの実数 $p, q > 1$ が,
p.35, 定義 2.6(b)	(accumulation point / cluster point)	(accumulation point)
p.46, (c)(i) の最後から 2 行目	定義 2.1(a)	定理 2.1(a)
p.46, (c)(ii) の最後	を表わしている .	もわかる .
p.48, 2.6 節 4 行	$\text{Fix}(T) := \{z \in X \mid F(z) = z\}$	$\text{Fix}(T) := \{z \in X \mid T(z) = z\}$
p.48, 注意 3(a) の最後	矛盾なく定義されている.	矛盾なく定義されている. なお, $\kappa(T)$ だけでなく, すべての $\kappa \in \mathcal{K}(T)$ を「 T のリプシッツ定数」と総称する場合も多いので注意されたい.
p.53, 2.7 節 1 行	関数解析 4 大定理	4 大定理
p.54, 下から 3-4 行	定義 2.6, 2.7 より	定義 2.5, 性質 2.2 より
p.59, 4 行	$\max_{0 \leq t \leq a}$	$\max_{0 \leq t \leq 1}$
p.59, 6(b)	$\mu := \min_{(t,x) \in Q} f(t,x) > 0$ となる	$\mu := \max_{(t,x) \in Q} f(t,x) > 0$ となる
p.67, 性質 3.2:1 行	固定された $v \in X$	固定された $v_0 \in X$
p.67, 証明 1-2 行	任意の $v_0 \in V$ に対して, $u_0 \in M$ が存在し, $v_0 = v + u_0$ と表せ,	任意の $v \in V$ に対して, $u_0 \in M$ が存在し, $v = v_0 + u_0$ と表せ,
p.67, 証明の 3 行	$v_0 + M = \{v + u_0 + u \mid u \in M\} = v + M$	$v_0 + M = \{v_0 + u_0 + u \mid u \in M\} = v + M$
p.70, 性質 3.3	(非負性,	(非負値性,
p.72-73 中	【すべての小文字イタリック体】 x と y	【すべての小文字ボールド体】 x と y
p.73	$= \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$	$= \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \ (k = 1, 2, \dots)$
p.73, 脚注	v_{m+1} を閉部分空間 $\cdots$ 上への直交射影になっている	v_{m+1} の「閉部分空間 $\cdots$ 上への直交射影」になっている
p.74, 証明 13-14 行	単調非減少なので	単調非減少となり
p.78, 定義 3.8	baunded linear	bounded linear
p.82,15 行	(1 章の例 1(e))	(2 章の例 1(e))
p.83, 中程	$\lceil \ x^{(n)}\ _\infty = 1$	$\lceil \ x^{(n)}\ _\infty \leq 1$
p.85, 中程	全射にならない]	A^{-1} が全射にならない]
p.102, 定理 4.3 の直前	次の定義は一樣有界性の定理 (定理 4.2) から	次の定理は一樣有界性の定理 (定理 4.2) から
p.104, 中程 2 箇所	$\lim_{k \rightarrow \infty}$	$\lim_{n \rightarrow \infty}$

頁, 位置	修正前 【補足】	修正後 【補足】
p.107, 下から 5 行	例題 5.2	例題 5.1
p.111, 脚注	Vandermond	Vandermonde
p.113, 定理 4.7(b)	例 1(c) 参照	例 1(b) 参照
p.123,(c) の注	「ある連続関数のフーリエ級数展開は無限に発散する点をもつ」	「 $C[0, 2\pi]$ に所属する関数の中に、ある点 (上の例では $t = 0$) でフーリエ級数展開の値が有限確定値に収束しない関数が存在する」
p.126, 中程	$\boldsymbol{x}^* \in C$ 対して,	$\boldsymbol{x}^* \in C$ に対して,
p.129,II.(a) のはじめ	閉部分空間 M は,	閉部分空間は,
p.132, 定理 5.2(d) の 3 行目	閉部分空間となり,	閉部分空間となる. さらに写像 A が
p.136,(a) の証明中	$U \cap V = \{0\}$	$U \cap V = \{\mathbf{0}\}$
p.137, 前半	$x_n \in U + V$ ($n = 1, 2, \dots$)	$\boldsymbol{x}_n \in U + V$ ($n = 1, 2, \dots$)
p.138, 定理 5.3 の直前	工学的な諸問題に	工学の諸問題に
p.139, 中程	$(\langle \mathbf{0}, \boldsymbol{x}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{0}, \boldsymbol{x}_n \rangle) = 0$	$(\langle \mathbf{0}, \boldsymbol{x}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{0}, \boldsymbol{x}_n \rangle) = \mathbf{0}$
p.153,3 行目	ガトー (Gâteau, 1889 ~ 1914) 微分	ガトー (Gâteaux, 1889 ~ 1914) 微分
p.153, 定義 5.2 の 4 行目	$h \rightarrow A_\xi(h)$	$h \mapsto A_\xi(h)$
p.154,17 行目	$-\ \Phi'(\xi)\ ^2 \leq \langle \Phi'(\xi), -\Phi'(\xi) \rangle$	$-\ \Phi'(\xi)\ ^2 = \langle \Phi'(\xi), -\Phi'(\xi) \rangle$
p.154,17 行目	$\langle \Phi'(\xi), \Phi'(\xi) \rangle \leq \ \Phi'(\xi)\ ^2$	$\langle \Phi'(\xi), \Phi'(\xi) \rangle = \ \Phi'(\xi)\ ^2$
p.155, 性質 5.3(a)	「フレッシュ微分可能」	「フレッシュ微分」
p.157, 定理 5.8 の証明 (a)	また, A_ξ の連続性より,	となる有界線形写像 $A_\xi : X \rightarrow Y$ が存在し,
p.159, 補題 5.1(b) の証明 2 行目	写像 $\phi_h : (a, b) \rightarrow X$ を	写像 $\phi_h : (a, b) \rightarrow Y$ を
p.164, 定義 5.3	$E_\xi := \{h \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \xi + h \in \mathcal{D}\}$	$E_\xi := \{h \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \xi + h \in \mathcal{D}_\mathbb{C}\}$
p.167, 2 箇所 (2 と 3 中)	可算個の閉部分空間列	可算個の閉部分空間
p.168	$ \text{Fix}(T) = \aleph$	$ \text{Fix}(T) \geq \aleph$ (注: $\dim(\mathcal{H}) < \infty$ なら、 $ \text{Fix}(T) = \aleph$)
p.171, 定理 6.1(a) の証明	$v = 0$ とすればよい.	$v_f = 0$ とすればよい.
p.173, 下から 7 行	必ずしも完備でない内積空間 X^*	必ずしも完備でない内積空間 X
p.181, 中程	式 (6.3) から (6.6) の議論から	式 (6.3) から (6.6) までの議論により,
p.192, 定義 7.1	(弱点列コンパクト集合)	(弱点列コンパクト集合 ⁰⁾)
p.192, 定義 7.1 の脚注 (新)		⁰⁾ ここに紹介した”弱点列コンパクト集合”の定義は「Dunford & Schwartz, Linear Operators Part 1 — General Theory (John Wiley & Sons), 1988」の Definition II.3.25 に倣っている。 $S \subset \mathcal{H}$ が”弱点列コンパクト集合”である条件に「 S の中に弱極限を持つ”(x_n) $_{n=1}^\infty$ の部分列” の存在性」を課している書物もあるので注意されたい。
p.208, 定理 7.7 の I(d)	(ただし, $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ は恒等写像)	(ただし, $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ は恒等写像, $P_C(I - \mu f')$ は 2 つの写像 $I - \mu f' : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ と $P_C : \mathcal{H} \rightarrow C$ の合成写像)
p.212, 上から 1/3 程	不動点となることを確かめた, さらに,	不動点となることを確かめた. さらに,
p.213, 中程	$\mu \in (0, 2\gamma/\kappa)$	$\mu \in (0, 2\gamma/\kappa]$
p.213, 系 7.2	$\arg \min_{x \in C} f(x) \neq \emptyset$	$\arg \min_{x \in C} f(x) \quad := \quad \begin{cases} z \in C \mid f(z) = \min_{x \in C} f(x) \\ \neq \emptyset \end{cases}$
p.215, 脚注	ハイブリット最急降下法の	ハイブリッド最急降下法の
p.222, 脚注	対する以下の下極限	対する下極限
p.224, 定義 A1 の下	$\alpha \in \mathbb{R}$ が S が有限集合	S が有限集合
p.225,7-8 行	定理によって「 $\dots$ 」によって保証される	定理 (「 $\dots$ 」) によって保証される
p.232	$\max_{\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\ A\boldsymbol{x}\ _\alpha}{\ \boldsymbol{x}_k\ _\alpha}$	$\max_{\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\ A\boldsymbol{x}\ _\alpha}{\ \boldsymbol{x}\ _\alpha}$
p.237 の系 A.1	固有空間を $M_k \subset \mathbb{C}^m$	固有空間 $M_k \subset \mathbb{C}^m$
p.239 下から 7 行	凸解析に	凸解析の
p.240	Rheinbolbt 4	Rheinboldt
p.241 の [36]	I. Yamad	I. Yamada

2 工学のための関数解析：章末問題の解説・ヒント (Dec.10, 2009 版)

1 章の問題の解説

- 1 (a) (2つの集合の場合) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ のみを示す (残りも同様にできる)。

$$\begin{aligned}x \in (A \cup B)^C &\Leftrightarrow \text{「} x \in X \text{ かつ } x \notin A \cup B \text{」} \\&\Leftrightarrow \text{「} x \in X \text{ かつ } (x \notin A \text{ かつ } x \notin B) \text{」} \\&\Leftrightarrow \text{「} (x \in X \text{ かつ } x \notin A) \text{ かつ } (x \in X \text{ かつ } x \notin B) \text{」} \\&\Leftrightarrow \text{「} (x \in A^C) \text{ かつ } (x \in B^C) \text{」} \\&\Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C\end{aligned}$$

(任意個の集合の場合) (1.9) の証明: 任意の $\lambda_1 \in \Lambda$ に対して、 $X \cap (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C \subset X \cap A_{\lambda_1}^C$ となるので

$$X \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^C \subset \bigcap_{\lambda_1 \in \Lambda} (X \cap A_{\lambda_1}^C) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \cap A_\lambda^C)$$

一方、任意の $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \cap A_\lambda^C)$ について「 $x \in X$ かつ $x \notin A_\lambda$ ($\forall \lambda \in \Lambda$)」すなわち、「 $x \in X$ かつ $x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 」となるので、 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \cap A_\lambda^C) \subset X \cap (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C$ も示され、(1.9) が成立する。

(1.10) の証明: 任意の $\lambda_1 \in \Lambda$ に対して、 $X \cap A_{\lambda_1}^C \subset X \cap (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C$ となるので

$$X \cap \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^C \supset \bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda} (X \cap A_{\lambda_1}^C) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \cap A_\lambda^C)$$

一方、任意の $x \in X \cap (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C$ に対して、「 $x \in X$ かつ $x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 」となるので、ある $\lambda_1 \in \Lambda$ について $x \in X \cap A_{\lambda_1}^C$ となるので $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \cap A_\lambda^C)$ となり、 $X \cap (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \cap A_\lambda^C)$ も示され、(1.10) が成立する。

- (b) 定義にしたがって、両辺の集合が等しくなることを云えばよい。(i) まず、準備として

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, -\frac{1}{n} \right] = (-\infty, 0) \quad (1)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, \infty \right) = (1, \infty) \quad (2)$$

が成立することに注意しておく [式 (1) の証明: 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(-\infty, -\frac{1}{n}] \subset (-\infty, 0)$ なので、「式 (1) の左辺 $\subset (-\infty, 0)$ 」の成立は明らか。また、任意の $x \in (-\infty, 0)$ に対して、 $x \leq -\frac{1}{m_x}$ を満たす十分大きな $m_x \in \mathbb{N}$ が存在するので、「式 (1) の左辺 $\supset (-\infty, 0)$ 」も成立する (式 (2) の証明は同様なので省略する)]。

$[0, 1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ を示すには等価な関係「左辺^C = 右辺^C」を示せばよい。

ド・モルガンの法則 [式 (1.10)] を用い、式 (1), 式 (2) の関係を用いれば

$$\begin{aligned}\text{右辺}^C &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) \right)^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right)^C \\&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left(-\infty, -\frac{1}{n} \right] \cup \left[1 + \frac{1}{n}, \infty \right) \right) \\&= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, -\frac{1}{n} \right] \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, \infty \right) \right) \\&= (-\infty, 0) \cup (1, \infty) = \text{左辺}^C\end{aligned}$$

の成立が確かめられる。

- (ii) $(0, 2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n} \right]$ も (i) と同様に示される (確認されたい)。

2 定義に従って考えれば明らかなので確かめられたい。

- 3 (a) (i) $0 \leq t \leq 1$ のとき、関数 $y = \log_e x$ ($x > 0$) に $x = \alpha := ta + (1-t)b > 0$ で接する直線の方程式を考えると自明な不等式

$$\log_e x \leq \log_e \alpha + \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) = \log_e \alpha + \frac{x}{\alpha} - 1, \quad \forall x > 0$$

(等号成立 $\Leftrightarrow x = \alpha$) を得るので、特に

$$\begin{aligned} t \log_e a &\leq t \log_e \alpha + \frac{1}{\alpha}(ta - t\alpha) \\ (1-t) \log_e b &\leq (1-t) \log_e \alpha + \frac{1}{\alpha}((1-t)b - (1-t)\alpha) \end{aligned}$$

となる。これらの辺々の和をとると

$$t \log_e a + (1-t) \log_e b \leq \log_e \alpha$$

したがって、

$$a^t b^{(1-t)} = e^{t \log_e a + (1-t) \log_e b} \leq e^{\log_e \alpha} = \alpha$$

(等号成立 $\Leftrightarrow a = \alpha = b \Leftrightarrow a = b$) が成立する。

- (ii) $t > 1$ のとき、(i) より、 $u, v > 0$ に対して $u^{1/t} v^{(1-1/t)} \leq \frac{1}{t}u + (1-1/t)v$ (等号成立 $\Leftrightarrow u = v$) となるので、両辺に t をかけると

$$tu^{1/t} v^{(1-1/t)} + (1-t)v \leq u$$

を得る。ここで $u = a^t b^{1-t}$ 、 $v = b$ を代入すると目的の不等式を得る。

- (iii) $t < 0$ のとき、 $1 < 1-t$ となるので、 t と $1-t$ を入れ換えて考えれば、(ii) の議論に帰着される。

- (b) $\sum_{i=1}^n a_i^p = 0$ あるいは $\sum_{i=1}^n b_i^q = 0$ のとき両辺とも 0 になり成立する。以下、 $A := (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p} \neq 0$ 、 $B := (\sum_{i=1}^n b_i^q)^{1/q} \neq 0$ の場合を証明する。(a-i) より、各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\frac{a_i}{A} \frac{b_i}{B} \leq \frac{\left(\frac{a_i}{A}\right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{b_i}{B}\right)^q}{q}$$

が成立するので、 i について総和をとると

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{AB} \leq \frac{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{A^p}}{p} + \frac{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{B^q}}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

両辺に AB をかけると目的の不等式を得る。

- (c) $p = 1$ のときは自明なので、以下 $p > 1$ と仮定する。まず、 $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p = 0$ すなわち $a_i = b_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) のとき、求める不等式が成立することは明らかなので、以下、 $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \neq 0$ を仮定する。(b) で用いた q が $q(p-1) = p$ を満たすことに注意すると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p &= \sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i (a_i + b_i)^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{q(p-1)} \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/q} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p} \right\} \end{aligned}$$

を得る。両辺を $(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p)^{1/q}$ でわると目的の不等式を得る。

- 4 単調増加な実数列 $(a_n)_{n=1}^\infty$ について考える (単調減少な場合も同様に示される)。 $(a_n)_{n=1}^\infty$ が有界であると仮定する。このとき、公理 1.1 より、 $\alpha := \sup a_n < \infty$ が定義できる。更に任意の正数 ε に対して、 $\alpha - \varepsilon < a_N$ を満たす a_N が (より正確には、 $\alpha - \varepsilon < a_N$ となる $N \in \mathbb{N}$ が) 存在するハズである

[もしそのような a_N が存在しなければ、 $\alpha - \varepsilon$ も $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の上界の 1 つとなり、 α が上限 (“最小の上界”) であることに矛盾する (付録の定義 A.2 参照)]。ところで数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ は単調増加するので

$$n > N \text{ ならば、} \alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

すなわち、

$$n > N \text{ ならば、} |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となり、定義 1.1 より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ が示された。

- 5 はじめに、準備として基本的な事実「 $s_n \leq t_n$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たす 2 つの実数列 $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ 、 $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ の極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \beta \in \mathbb{R}$ について、 $\alpha \leq \beta$ が成立する」を確認しておく。仮定より

$$\begin{aligned} (\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1) \quad |s_n - \alpha| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ (\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2) \quad |t_n - \beta| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

となり

$$(\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}) \quad \alpha - \frac{\varepsilon}{2} < s_n \leq t_n < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

となるから「任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\alpha < \beta + \varepsilon$ 」が成立していることに注意しよう。したがって、 $\alpha \leq \beta$ となる (なぜなら、仮に $\alpha - \beta =: \delta > 0$ だとすると、 $\alpha > \beta + \frac{\delta}{2}$ となり、上の結論に矛盾する)。

- (a) $\hat{a}_n := \sup\{a_m \mid m \geq n\}$, $\check{a}_n := \inf\{a_m \mid m \geq n\}$, $\hat{b}_n := \sup\{b_m \mid m \geq n\}$, $\check{b}_n := \inf\{b_m \mid m \geq n\}$ とおくと、 $a_m \leq b_m$ ($m \geq n$) より、任意の正整数 n に対して $\check{a}_n \leq \check{b}_n$, $\hat{a}_n \leq \hat{b}_n$ となる。これより

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{a}_n &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \check{b}_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{a}_n &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{b}_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

を得る。

- (b) $(\Rightarrow)$ の証明については、定理 2.1(a) の議論を参照されたい。以下、 $(\Leftarrow)$ を示す。 $\alpha := \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ とする。このとき、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ と $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ の定義 (定義 1.2) に注意すると、任意の正数 ε に対し、ある正整数 N_1 と N_2 が存在し、

$$\begin{aligned} N_1 < n \text{ ならば} \quad -\varepsilon &< \check{a}_n - \alpha \leq a_n - \alpha \leq \hat{a}_n - \alpha \\ N_2 < n \text{ ならば} \quad \varepsilon &> \hat{a}_n - \alpha \geq a_n - \alpha \geq \check{a}_n - \alpha \end{aligned}$$

が成立する。したがって、

$$\max\{N_1, N_2\} < n \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となり、 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ は α に収束する。

- 6 (a) $a > 0$ が単調増加な実数列 $(nb)_{n=1}^{\infty}$ の上界になりえないことを示せばよい。 $a > 0$ が $(nb)_{n=1}^{\infty}$ の上界であれば、公理 1.1 より、実数列 $(nb)_{n=1}^{\infty}$ の上限 $s := \sup\{nb \mid n \in \mathbb{N}\}$ が存在し、

$$nb \leq s, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

を満たす。更に、 $s - b$ は上限でないので、 $s - b < mb$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在する。これは、 $s < (m+1)b$ ということなので、 s の定義に矛盾する。

- (b) $J_n = [a_n, b_n]$ ($n \in \mathbb{N}$) とするとき、

$$a_1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_1$$

となるので、 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な増加数列で $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な減少数列となるので、収束し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ となる (章末問題 4 参照)。章末問題 5(a) より、 $a \leq b$ となり、 $[a, b] \neq \emptyset$ を得る。また、上限、下限の定義より、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a$, $b \leq b_n$ となり、 $J_n \supset [a, b] \neq \emptyset$ が成立していることも確かめられる。

7 (a) 数学的帰納法を使う。 $x_1 = 2$ は明らかに正の有理数である。 x_n が正の有理数ならば、 $\frac{x_n}{2}$ も $\frac{1}{x_n}$ も正の有理数となるので、 x_{n+1} も正の有理数となる。これより、すべての x_n は正の有理数となる。また、「相加平均 $\geq$ 相乗平均」の関係から、総ての $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して $\frac{x_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \right) \geq \sqrt{\frac{x_n}{2} \cdot \frac{1}{x_n}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ すなわち、 $x_{n+1} \geq \sqrt{2}$ が成立していることもわかる。更に、 $x_{n+1} - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$ ($n \geq 1$) となり、単調減少することもわかる。

(b) $(x_n)_{n=1}^\infty$ の収束先を α とし、その正体を考えよう。 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}$ の両者は等しくなり、2 次方程式 $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}$ を得る。これを解くと、 $\alpha = \pm\sqrt{2}$ となるが、上の議論から $\alpha \geq \sqrt{2}$ なので、 $\alpha = \sqrt{2}$ が $(x_n)_{n=1}^\infty$ の極限值となる。

8 $x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - 1$ の両辺から $\alpha = \frac{3}{2}\alpha - 1$ の両辺を引くと $x_{n+1} - \alpha = \frac{3}{2}(x_n - \alpha)$ [$\alpha = 2$] となり、 $(x_n - 2)_{n=1}^\infty$ は初項 $x_1 - 2 = 3$ 公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列となることがわかる。従って、 $x_n = 3 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} + 2$ ($n = 1, 2, \dots$) を得る。 $(x_n)_{n=1}^\infty$ は有界でないので発散する。注意: 前問の場合と違って $(x_n)_{n=1}^\infty$ の収束は保証されていなかったの、 $\alpha = \frac{3}{2}\alpha - 1$ の解 $\alpha = 2$ は $(x_n)_{n=1}^\infty$ の極限值になるとは限らない (現に $(x_n)_{n=1}^\infty$ は発散し、いずれの値にも収束しない)。今、 $f(x) := \frac{3}{2}x - 1$ という関数を考えると、問題の漸化式は、 $x_{n+1} = f(x_n)$ であり、 α のように、関数 f を施す前後で値が変わらない特別な点を「 f の不動点」という。

9 (a) 一般項を求めるのは難しそうなのでコーシーの判定条件を使ってみよう。任意の正整数 $m > n$ に対して

$$|S_m - S_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + (-1)^{m-n-1} \frac{1}{m} \right|$$

となるので、 $m - n$ が偶数のときと奇数のときに分けて考える。

(i) $m - n$ が偶数のとき、

$$\begin{aligned} & |S_m - S_n| \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) > 0 \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \dots - \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1} \right) - \frac{1}{m} < \frac{1}{n+1} \right\} \end{aligned}$$

(ii) $m - n$ が奇数のとき、

$$\begin{aligned} & |S_m - S_n| \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1} \right) + \frac{1}{m} > 0 \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \dots - \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) < \frac{1}{n+1} \right\} \end{aligned}$$

となるので、 $m > n$ ならばいつでも

$$|S_m - S_n| < \frac{1}{n+1} \quad (3)$$

が成立する ($m = n$ の場合も $S_m - S_n = 0$ なので (3) はそのまま成立する)。任意の正数 $\varepsilon < 1$ に対して $N := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ ($\lceil x \rceil$ は、 x 以上の最小の正整数) とすれば、任意の $n, m > N$ に対して、 $|S_m - S_n| < \varepsilon$ となる。したがって、 $(S_n)_{n=1}^\infty$ は、コーシーの判定条件を満たし収束することがわかる。注意: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \dots$ のように無限和によって表される形式を級数という。級数を調べるコツは、第 n までの和 (部分和という) として定義される数列 S_n の $n \rightarrow \infty$ における議論に帰着させることにある。

(b)

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \\ & \quad \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}-1} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + \dots + (2^n - 2^{n-1}) \times \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

より、 $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \infty$ を得る。

- (c) $\varrho \leq 1$ のとき、(b) の結果と $\frac{1}{k^\varrho} \geq \frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{[\varrho]} = \infty$ となり発散する。
 $\varrho > 1$ のとき、関数 $f(x) = \frac{1}{x^\varrho}$ の形に注意すると、 $k = 2, 3, \dots$ に対して、 $\frac{1}{k^\varrho} < \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\varrho} dx$ となるので

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\varrho} &< 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\varrho} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\varrho} dx \\ &< 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^\varrho} dx = \frac{\varrho}{\varrho-1} < \infty \end{aligned}$$

を得る。このことは、 $(S_n^{[\varrho]})_{n=1}^\infty$ が、上に有界な単調増加数列であることを示しており、収束することがわかる (性質 1.1(a) と章末問題 4 を参照)。

- 10 (a) 章末問題 5(a) より、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n \geq 0$ となることは明らかなので、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n > \varepsilon > 0$ と仮定し、矛盾を導けばよい。この仮定の下では、有限な正整数 $N > 0$ が存在し、「すべての $n (\geq N)$ に対して、 $\beta_n > \varepsilon$ 」でなければならない (なぜなら、このような N が存在しないと $I := \{n \in \mathbb{N} \mid \beta_n \leq \varepsilon\}$ が、無限集合となり、 $\liminf$ の定義から、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq \varepsilon$ となってしまう)。したがって以下の矛盾が導かれる。

$$\begin{aligned} \infty &> \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \beta_n = \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k \beta_k + \sum_{n=N}^\infty \alpha_n \beta_n \\ &\geq \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k \beta_k + \varepsilon \sum_{n=N}^\infty \alpha_n = \infty \end{aligned}$$

- (b) 任意の正整数 N に対して、 $\prod_{n=1}^N (1 - \alpha_n) > 0$ であることに注意し、簡単な不等式「 $1 - x \leq e^{-x}$ ($x \in \mathbb{R}$)」を用いると、

$$\begin{aligned} \log_e \prod_{n=1}^N (1 - \alpha_n) &= \sum_{n=1}^N \log_e (1 - \alpha_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^N \log_e (e^{-\alpha_n}) = - \sum_{n=1}^N \alpha_n \end{aligned}$$

を得るので、

$$0 \leq \prod_{n=1}^N (1 - \alpha_n) \leq \exp \left\{ - \sum_{n=1}^N \alpha_n \right\} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

となる。

- (c) 「 $\Rightarrow$ 」は (b) で示したので、「 $\Leftarrow$ 」を示す。簡単な不等式「 $\log_e x \leq x - 1$ ($\forall x > 0$)」と極限に関する自明な事実

$$\text{「} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \text{」} \Rightarrow \text{「} (\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0) \alpha_n \leq \frac{1}{2} \text{」}$$

を利用すると

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 - \alpha_n) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \log_e (1 - \alpha_n) = -\infty \\ \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \log_e \frac{1}{1 - \alpha_n} = \infty &\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} - 1 \right) = \infty \\ \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N_0}^N \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n} = \infty &\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \sum_{n=N_0}^N \alpha_n = \infty \\ \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \alpha_n = \infty \end{aligned}$$

となる。

(d) n に関する数学的帰納法を用いる。

$$S_1 = \alpha_1 \leq 1$$

$$S_2 = \alpha_1(1 - \alpha_2) + \alpha_2 \leq (1 - \alpha_2) + \alpha_2 \leq 1$$

となっているので、ある $N \in \mathbb{N}$ に対して「 $S_N \leq 1$ 」が成立していると仮定しよう。このとき

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ \alpha_i \prod_{j=i+1}^{N+1} (1 - \alpha_j) \right\} = \sum_{i=1}^N \left\{ \alpha_i \prod_{j=i+1}^{N+1} (1 - \alpha_j) \right\} + \alpha_{N+1} \\ &= (1 - \alpha_{N+1}) \sum_{i=1}^N \left\{ \alpha_i \prod_{j=i+1}^N (1 - \alpha_j) \right\} + \alpha_{N+1} \\ &= (1 - \alpha_{N+1}) S_N + \alpha_{N+1} \leq 1 \end{aligned}$$

となり、「 $S_n \leq 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)」の成立が確かめられた。

11 一次独立性の定義を思い出し、この条件をクリアするかどうかを確認すればよい。

$$c_1(1, -2, 3) + c_2(5, 6, -1) + c_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0) \quad (4)$$

を満足する解 (c_1, c_2, c_3) の中で、 $(0, 0, 0)$ 以外のものがあれば、 x_1, x_2, x_3 は、1 次独立でない（つまり、1 次従属）。式 (4) を（例えばガウスの消去法によって）解くと、 $c_1 = -\frac{1}{2}t$, $c_2 = -\frac{1}{2}t$, $c_3 = t$ (t は任意の実数) となる。したがって、例えば、 $t = 1$ において得られる $(-1/2, -1/2, 1) \neq (0, 0, 0)$ は方程式 (4) の解なので $\{x_1, x_2, x_3\}$ は 1 次従属となる（別解: 例えば、方程式 (4) を (c_1, c_2, c_3) について

整理したときの、係数行列 $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ の行列式 (determinant) がゼロとなることを示し、非自明解 ($(0, 0, 0)$ 以外の解) が存在することを示してもよい)。

12 ガウスの消去法を用いればよい。答え：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

(ただし、 r, s, t は任意の実数)。

$$\begin{aligned} 13 \quad v_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad v_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \\ v_3 &= \frac{\mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

2 章の問題の解説

- 1 (a) $(X, \tilde{d})$ が距離空間の定義の条件 (D1), (D2) を満たすことは明らか。また、実関数 $f(t) := \frac{t}{1+t}$ を微分すると、 $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ ($\forall t \geq 0$) となるので f は $t \geq 0$ の範囲で単調増加となり、これを $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ に適用すると

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x, y) &= f(d(x, y)) \leq f(d(x, z) + d(z, y)) = \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\ &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\ &\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} = \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(z, y) \end{aligned}$$

となり、(D3) も確かめられた。また、任意の点 $x_0 \in X$ と $x \in X$ の間の新しい距離は $\tilde{d}(x_0, x) = \frac{d(x_0, x)}{1 + d(x_0, x)} \leq 1$ となるので、 X の有界性も確かめられた。

(b) $(\mathbb{R}, d)$ が距離空間の条件 (D1), (D2), (D3) を満たすことは明らか。完備でないことを示すには、極限値をもたないコーシー列を与えればよい。実数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ として $x_n := n$ ($n = 1, 2, \dots$) を選ぶと $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \arctan x_n - \frac{\pi}{2} \right| = 0$ となるので、

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= \left| \arctan x_n - \arctan x_m \right| \\ &\leq \left| \arctan x_n - \frac{\pi}{2} \right| + \left| \frac{\pi}{2} - \arctan x_m \right| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

を満たし、 $(\mathbb{R}, d)$ の Cauchy 列となる。一方、 $(\mathbb{R}, d)$ が完備だとすれば、ある $\alpha \in \mathbb{R}$ (したがって、 $-\frac{\pi}{2} < \arctan(\alpha) < \frac{\pi}{2}$) が存在し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\arctan x_n - \arctan \alpha| = 0$ とならねばならず、

$$\begin{aligned} 0 &< \left| \arctan(\alpha) - \frac{\pi}{2} \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \arctan(\alpha) - \arctan x_n \right| + \left| \arctan x_n - \frac{\pi}{2} \right| \right) = 0 \end{aligned}$$

のように矛盾する。

(c) 例題 2.3 を参考にし、同様に示せるので省略する (確認されたい)。 (証明終)

2 $(\mathbb{Q}, d)$ が距離空間の条件 (定義 2.1) を満たすことは容易に確かめられる (確認されたい)。

性質 2.3(c) を使う。 S の点からなる点列 $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ がある点 $q \in \mathbb{Q}$ に収束するとき、 $q \notin S$ と仮定すると、 $\varepsilon := |q| - 2 > 0$ となるので、十分大きな正整数 L に対して「 $d(r_n, q) < \frac{\varepsilon}{2}$ ($\forall n \geq L$)」
「 $2 + \varepsilon = d(0, q) \leq d(0, r_n) + d(r_n, q) \leq 2 + d(r_n, q) < 2 + \frac{\varepsilon}{2}$ ($\forall n \geq L$)」となり、矛盾する。したがって、 $q \in S$ となり、 S は距離空間 $\mathbb{Q}$ の閉集合となる。

3 「 f が X で連続」であるとき、任意の閉集合 $V (\subset Y)$ に対して、 $Y - V (\subset Y)$ は開集合となるので、定理 2.2 より、

$$f^{-1}(Y - V) = \{x \in X \mid f(x) \notin V\} = X - f^{-1}(V)$$

は、 X の開集合となるので、

$$f^{-1}(V) = X - f^{-1}(Y - V)$$

は閉集合となることがわかり、「 V が Y の閉集合ならば、 $f^{-1}(V)$ は、 X の閉集合」が確かめられる。

逆に、「 V が Y の閉集合ならば、 $f^{-1}(V)$ は X の閉集合」を仮定すると、任意の開集合 $U (\subset Y)$ について $Y - U (\subset Y)$ は Y の閉集合となるので、

$$f^{-1}(Y - U) = X - f^{-1}(U)$$

は、 X の閉集合となるので、

$$f^{-1}(U) = X - f^{-1}(Y - U)$$

は開集合となることがわかり、定理 2.2 より、「 f が X で連続」であることが確認できる。

4 f は、すべての $p \in S$ で連続なので、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $r(p) > 0$ (p に依存してよい) が存在し、

$$\text{「} x \in B_X(p, r(p)) \cap S \text{」} \Rightarrow \text{「} d_Y(f(x), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{」} \quad (5)$$

となる。また、「 $S \subset \bigcup_{p \in S} B_X\left(p, \frac{r(p)}{2}\right)$ 」で S はコンパクトなので、有限個の開球 $B_X\left(p_k, \frac{r(p_k)}{2}\right)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) をうまく選ぶと

$$S \subset \bigcup_{k=1}^m B_X\left(p_k, \frac{r(p_k)}{2}\right) \quad (6)$$

とできる。以下、 $\delta(\varepsilon) := \min \left\{ \frac{r(p_1)}{2}, \frac{r(p_2)}{2}, \dots, \frac{r(p_m)}{2} \right\}$ [ξ の選び方に依らないことに注意] が条件 (2.4.8) を満足することを示す。任意の $\xi \in S$ に対して、(6) より、「 $\xi \in B_X\left(p_k, \frac{r(p_k)}{2}\right)$ 」を満たす $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ が少なくとも 1 つ存在するので、(5) から

$$d_Y(f(\xi), f(p_k)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

を得る。更に、「 $d_X(x, \xi) < \delta(\varepsilon)$ となる任意の $x \in S$ 」に対して

$$d_X(x, p_k) \leq d_X(x, \xi) + d_X(\xi, p_k) < \delta(\varepsilon) + \frac{r(p_k)}{2} \leq \frac{r(p_k)}{2} + \frac{r(p_k)}{2} = r(p_k)$$

となるから、再び (5) が使えて、 $d_Y(f(x), f(p_k)) < \frac{\varepsilon}{2}$ が保証される。したがって、

$$d_Y(f(x), f(\xi)) \leq d_Y(f(x), f(p_k)) + d_Y(f(p_k), f(\xi)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が保証されることがわかった。

- 5 (a) ($C[0, 1], d_{max}$) が距離空間なので、 $x, y, z \in K \subset C[0, 1]$ が「 (K, d_{max}) が距離空間となる定義 2.1 の 3 条件 (D1), (D2), (D3)」を満たすことは明らか。以下、 (K, d_{max}) の完備性を示す。 K 中のコーシー列 $x_n \in K$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は、 $C[0, 1]$ 中のコーシー列でもあるから、ある $z \in C[0, 1]$ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{max}(x_n, z) = 0$ となる。ここで $z \notin K$ と仮定すると、[『](i) $z(0) \neq 0$ または $z(1) \neq 1$, (ii) ある $t^* \in (0, 1)$ について $z(t^*) < 0$, (iii) ある $t^* \in (0, 1)$ について $z(t^*) > 1$ 』のいずれかが成立するので、すべての $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して (i) のとき

$$d_{max}(x_n, z) \geq \max\{|z(0)|, |1 - z(1)|\} =: \varepsilon_1 > 0$$

(ii) のとき

$$d_{max}(x_n, z) \geq |z(t^*)| =: \varepsilon_2 > 0$$

(iii) のとき

$$d_{max}(x_n, z) \geq |z(t^*) - 1| =: \varepsilon_3 > 0$$

となり、いずれの場合も

$$d_{max}(x_n, z) \geq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} > 0$$

となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, z) = 0$ に矛盾する。したがって、 $z \in K$ となり、 (K, d_{max}) が完備距離空間となることが示された。

- (b) まず、任意の $x, y \in K$ に対して

$$|T[x](t) - T[y](t)| = t|x(t) - y(t)|, \quad \forall t \in [0, 1]$$

となるので、 $x \neq y$ のとき、ある $t_0 \in (0, 1)$ が存在し、

$$\begin{aligned} d_{max}(T(x), T(y)) &= \max_{0 \leq t \leq 1} t|x(t) - y(t)| \\ &= t_0|x(t_0) - y(t_0)| > 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} d_{max}(x, y) &= \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| \\ &\geq |x(t_0) - y(t_0)| > d_{max}(T(x), T(y)) \end{aligned}$$

が成立する。

- (c) $T(z) = z$ となる $z \in K$ が存在したと仮定する。このとき、すべての $t \in [0, 1]$ に対して $(1-t)z(t) = 0$ となり、結局、 $t \in [0, 1)$ で $z(t) = 0$ かつ $z(1) = 1$ でなければならず、 $z \in C[0, 1]$ に矛盾する。

- 6 (a) 初期条件 (2.50) の下で微分方程式 (2.51) の解 $x(t)$ が区間 I で存在するならば、 $t \in I$ で式 (2.51) の両辺を積分すると、 x に関する積分方程式

$$x(t) - x(\tau_0) = x(t) - \xi_0 = \int_{\tau_0}^t f(s, x(s)) ds$$

を得る。逆に、 $x(t)$ が区間 I で積分方程式 (2.52) の解になるならば、 $x(t)$ は自動的に初期条件 (2.50) を満たす。更に式 (2.52) の両辺を t で微分すると $x(t)$ が微分方程式 (2.51) の解になっていることが確かめられる。

(b) (a) の結果より、積分方程式 (2.52) の解が $(\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta)$ 上で唯一存在することを示せば十分である。閉区間 $J := [\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$ に対して完備距離空間 $C(J)$ (例題 2.9 参照, ただし、ここでは距離 d_{max} を単に d と記す) の部分集合

$$\mathcal{F} := \left\{ \phi \in C(J) \mid \max_{t \in J} |\phi(t) - \xi_0| \leq b \right\}$$

は、 $C(J)$ の閉集合となるので¹、 $\mathcal{F}$ 自身が完備距離空間となる。また、

$$\phi \in \mathcal{F} \text{ ならば } \{(t, \phi(t)) \mid t \in J\} \subset Q$$

となるので、 $f(t, \phi(t))$ は、 J 上で t の連続関数となり、さらに J 上の連続関数 $T(\phi)$ を

$$(T(\phi))(t) = \xi_0 + \int_{\tau_0}^t f(\tau, \phi(\tau)) d\tau \quad (\forall t \in J)$$

を定義すると

$$|(T(\phi))(t) - \xi_0| = \left| \int_{\tau_0}^t f(\tau, \phi(\tau)) d\tau \right| \leq \mu \delta \leq b \quad (\forall t \in J)$$

となるので、 $T(\phi) \in \mathcal{F}$ も保証される。したがって写像 $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ が定義できる。この写像は任意の $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}$ に対して

$$\begin{aligned} d(T(\phi_1), T(\phi_2)) &= \max_{t \in J} |(T(\phi_1))(t) - (T(\phi_2))(t)| \\ &= \max_{t \in J} \left| \int_{\tau_0}^t f(\tau, \phi_1(\tau)) d\tau - \int_{\tau_0}^t f(\tau, \phi_2(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \max_{t \in J} \left| \int_{\tau_0}^t |f(\tau, \phi_1(\tau)) - f(\tau, \phi_2(\tau))| d\tau \right| \leq L \max_{t \in J} \left| \int_{\tau_0}^t |\phi_1(\tau) - \phi_2(\tau)| d\tau \right| \\ &\leq L\delta \max_{t \in J} |\phi_1(t) - \phi_2(t)| = L\delta d(\phi_1, \phi_2) \end{aligned}$$

となるので、 $\mathcal{F}$ 上の縮小写像になり、定理 2.6 を利用すると T の不動点が $\mathcal{F}$ に唯一存在することが保証される。この不動点を $x = x(t)$ のように表せば、これが、 $(\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta)$ 上で積分方程式 (2.52) の唯一解を与えることが確認される。

7 任意の $g \in C([a, b])$ (ここでは距離 d_{max} を単に d と記す) に対して

$$(T(g))(t) := \lambda \int_a^t K(t, s) g(s) ds + \phi(t) \quad (\forall t \in [a, b])$$

とすると、 $T(g) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続関数となるので、写像 $T : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ が定義できる。以下、 $\mu := \max_{(t, s) \in \Delta} |K(t, s)|$ とすると、任意の $g_1, g_2 \in C([a, b])$ に対して

$$\begin{aligned} |(T(g_1))(t) - (T(g_2))(t)| &= \left| \lambda \int_a^t K(t, s) \{g_1(s) - g_2(s)\} ds \right| \\ &\leq |\lambda|(t-a) \mu \max_{a \leq s \leq t} |g_1(s) - g_2(s)| \leq |\lambda|(t-a) \mu d(g_1, g_2) \end{aligned}$$

を得る。これを利用して

$$\begin{aligned} |(T^2(g_1))(t) - (T^2(g_2))(t)| &= \left| \lambda \int_a^t K(t, s) \{(T(g_1))(s) - (T(g_2))(s)\} ds \right| \\ &\leq |\lambda| \int_a^t |K(t, s)| |(T(g_1))(s) - (T(g_2))(s)| ds \\ &\leq |\lambda| \int_a^t \mu |\lambda|(s-a) \mu d(g_1, g_2) ds = |\lambda|^2 \mu^2 \frac{(t-a)^2}{2} d(g_1, g_2) \end{aligned}$$

¹点列 $\phi_n \in \mathcal{F}$ ($n \in \mathbb{N}$) が $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\phi_n, \phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in J} |\phi_n(t) - \phi(t)| = 0$ となるならば、

$$\begin{aligned} \max_{t \in J} |\phi(t) - \xi_0| &\leq \max_{t \in J} |\phi_n(t) - \xi_0| + \max_{t \in J} |\phi(t) - \phi_n(t)| \\ &\leq b + \max_{t \in J} |\phi(t) - \phi_n(t)| \rightarrow b \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

すなわち、 $\phi \in \mathcal{F}$ が保証され、 $\mathcal{F}$ が閉集合となる。

も得られる。さらに、一般に任意の $m \in \mathbb{N}$ について

$$|(T^m(g_1))(t) - (T^m(g_2))(t)| \leq |\lambda|^m \mu^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(g_1, g_2)$$

が成立することも数学的帰納法で容易に確認できる。これより

$$\begin{aligned} d(T^m(g_1), T^m(g_2)) &= \max_{a \leq t \leq b} |(T^m(g_1))(t) - (T^m(g_2))(t)| \\ &\leq \frac{\{|\lambda|\mu(b-a)\}^m}{m!} d(g_1, g_2) \quad (m \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

を得る。ところが十分大きな $m_\lambda \in \mathbb{N}$ を用いると

$$\frac{\{|\lambda|\mu(b-a)\}^{m_\lambda}}{m_\lambda!} < 1$$

とできるので、 $T^{m_\lambda} : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ は縮小写像となる。系 2.2 より、 T は唯一の不動点 $f \in C[a, b]$ を持つことが保証されるが、これが積分方程式 (2.53) の連続解となっている。

3 章の問題の解説

1 「(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a)」の順に示す。

I. 「(a) $\Rightarrow$ (b)」は自明なので「(b) $\Rightarrow$ (c)の証明」からはじめる。(b)が成立するにもかかわらず、(c)が成立せず、したがって、 $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ となる 1 次独立な $x, y \in X$ の存在を仮定しよう。一般性を損なうことなく $0 < \|x\| \leq \|y\|$ としてよく、 $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = \left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1$ となるので

$$\begin{aligned} 2 &> \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| = \frac{1}{\|x\|\|y\|} \|\|y\|(x+y) - (\|y\| - \|x\|)y\| \\ &\geq \frac{1}{\|x\|\|y\|} \|\|y\|\|x+y\| - (\|y\| - \|x\|)\|y\|\| \\ &= \frac{1}{\|x\|\|y\|} \|\|y\|(\|x\| + \|y\|) - (\|y\| - \|x\|)\|y\|\| = 2 \end{aligned}$$

となり矛盾する。したがって、「(b) $\Rightarrow$ (c)」が示された。

II. 「(c) $\Rightarrow$ (d)の証明」(c)の成立を仮定するとき、 $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ であれば x と y は 1 次従属でなければならない。 $x=0$ または、 $y=0$ のとき、 $\|y\|x=0=\|x\|y$ が成立することは自明なので、 $\|x\|\|y\| > 0$ と仮定する。このとき、ある $\alpha \neq 0$ に対して $x = \alpha y$ が成立しなければならず、また、 $|\alpha+1|\|y\| = (|\alpha|+1)\|y\|$ となるので、 $\alpha > 0$ でなければならない。これより $\|y\|x = \|x\|y$ が成立することは明らか。

III. 「(d) $\Rightarrow$ (a)の証明」(d)の成立を仮定するとき、ある $\lambda \in (0, 1)$ とある $x, y \in X$ ($\|x\| = \|y\| = 1$) に対して $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|$ となるとき、 $\|(1-\lambda)y\|\lambda x = \|\lambda x\|(1-\lambda)y$ でなければならないので、 $\|\lambda x\|(1-\lambda) > 0$ で両辺を割って

$$y = \frac{\|(1-\lambda)y\|\lambda}{\|\lambda x\|(1-\lambda)} x = \frac{\|y\|}{\|x\|} x = x$$

したがって、 $x \neq y$ ($\|x\| = \|y\| = 1$) ならば $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|$ でなければならず、「(d) $\Rightarrow$ (a)」が示された。

2 (a) 問題 1(b) より明らか。

(b) 中線定理より

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x-y\|^2 \\ &\leq 4 - \varepsilon^2 \end{aligned}$$

すなわち

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} = 1 - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}\right)$$

を得る。 $\delta := 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$ とすれば、条件 (3.47) が確かに成立する。

3 I. 「(a) $\Rightarrow$ (b)」の証明: まず、任意の作用素ノルム $\|\cdot\|$ について

$$\|A^m\| \geq \rho(A^m) = (\rho(A))^m \geq 0$$

が成立することに注意する²。(a)を仮定すると、

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\| \geq \lim_{m \rightarrow \infty} (\rho(A))^m \geq 0$$

が成立するので、 $0 \leq \rho(A) < 1$ となる。

II. 「(b) $\Rightarrow$ (a)」の証明: (b)を仮定すると、「定理 A.5(b)」より、十分小さな $\varepsilon > 0$ を用いて

$$\|A\|_\alpha \leq \rho(A) + \varepsilon < 1$$

を満たす作用素ノルム $\|\cdot\|_\alpha$ が存在する。したがって、例題 3.2 より、

$$0 \leq \|A^m\|_\alpha \leq (\|A\|_\alpha)^m \leq (\rho(A) + \varepsilon)^m \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

が成立し、(a)が示された。

4 (a) [(i) $\Rightarrow$ (ii)] 任意のノルムについて

$$\text{「}(S_N(A))_{N=1}^\infty \text{ が収束」} \Rightarrow \text{「}(S_N(A))_{N=1}^\infty \text{ はコーシー列」}$$

となることに注意する ($\mathbb{R}^{n \times n}$ は完備なので、実は $\Rightarrow$ は $\Leftrightarrow$ に置き換えられる)。従って、(i)を仮定すると

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|A^N\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(A) - S_{N-1}(A)\| = 0$$

となる。「(ii) $\Rightarrow$ (i)」は、以下のように (b) の中で示される。

- (b) A が収束行列であるとき、問題 3 より、 $\det(\lambda I - A) \neq 0$ ($|\lambda| \geq 1$) となり、 $(I - A)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在する事に注意する。また、任意の $N \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} S_N(A) &= I + A + A^2 + \dots + A^N \\ AS_N(A) &= A + A^2 + \dots + A^N + A^{N+1} \end{aligned}$$

より、 $(I - A)S_N(A) = I - A^{N+1}$ となるので、両辺に $(I - A)^{-1}$ を左からかけ

$$S_N(A) = (I - A)^{-1}(I - A^{N+1})$$

となる。したがって、劣乗法性 ($\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$) を満たす任意のノルム (例えば、フロベニウスノルムや作用素ノルム) に対して

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(A) - (I - A)^{-1}\| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \|(I - A)^{-1}(I - A^{N+1}) - (I - A)^{-1}\| \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|(I - A)^{-1}\| \|A^{N+1}\| = \|(I - A)^{-1}\| \lim_{N \rightarrow \infty} \|A^{N+1}\| = 0 \end{aligned}$$

となり、更に、 $\mathbb{R}^{n \times n}$ に定義できるどんなノルムも等価となるので (定理 3.1)、任意のノルムの意味で

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(A) = (I - A)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

が成立することがわかる。

- (c) ある作用素ノルムで $\|A\| < 1$ となれば、定理 A.5 より、 $\rho(A) \leq \|A\| < 1$ となり、したがって問題 3 の結果と本問 (b) より A は収束行列で、 $(I - A)^{-1}$ が存在する。また、式 (3.49) の表現より、

$$\begin{aligned} \|(I - A)^{-1}\| &= \|I + A + A^2 + A^3 + \dots\| \\ &\leq \|I\| + \|A\| + \|A\|^2 + \dots = \frac{1}{1 - \|A\|} \end{aligned}$$

²はじめの不等号は定理 A.5(a) による。また、 A の固有値 λ に対して固有ベクトル u が対応するとき、 $A^m u = A^{m-1} A u = \lambda A^{m-1} u = \dots = \lambda^m u$ となるので $\rho(A^m) = (\rho(A))^m$ も成立する。

となり、式 (3.50) の上界側が示された。更に、 $I = (I - A)^{-1}(I - A)$ に「作用素ノルムの劣乗法性 (例題 3.2)」と $\|I\| = 1$ を使うと

$$1 = \|(I - A)^{-1}\| \|(I - A)\| \leq \|(I - A)^{-1}\|(\|I\| + \|A\|) = \|(I - A)^{-1}\|(1 + \|A\|)$$

となるので、式 (3.50) の下界側も示された。

- (d) $\|I - A^{-1}B\| \leq \|A - B\| \|A^{-1}\| = \kappa < 1$ に (c) の結果を適用すると $A^{-1}B = I - (I - A^{-1}B)$ が正則であることがわかるので、 $B = A(A^{-1}B)$ も正則となり、不等式 (3.50) より、

$$\begin{aligned} \|B^{-1}\| &\leq \|B^{-1}A\| \|A^{-1}\| = \|(A^{-1}B)^{-1}\| \|A^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|I - A^{-1}B\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \kappa} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \|B^{-1} - A^{-1}\| &\leq \|I - A^{-1}B\| \|B^{-1}\| \\ &\leq \|A - B\| \|A^{-1}\| \|B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|^2 \|A - B\| (1 - \kappa)^{-1} \end{aligned}$$

- (e) $\alpha := \|\Phi(x^*)^{-1}\|$ 、 $\beta < \frac{1}{\alpha}$ とする。写像 Φ は x^* で連続であるから、ある $\delta > 0$ に対して

$$(\forall x \in D \cap \overline{B}(x^*, \delta)) \quad \|\Phi(x^*) - \Phi(x)\| \leq \beta$$

となる (ただし、 $\overline{B}(x^*, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x^*\| \leq \delta\}$)。したがって

$$(\forall x \in D \cap \overline{B}(x^*, \delta)) \quad \|\Phi(x^*) - \Phi(x)\| \|\Phi(x^*)^{-1}\| \leq \alpha\beta < 1$$

これに (d) の結果を適用すると、任意の $x \in D \cap \overline{B}(x^*, \delta)$ に対して $\Phi(x)$ は正則となり、 $\gamma := \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta}$ によって (3.53) が成立することがわかる。更に、(d) の結果 [式 (3.52)] を用いると

$$(\forall x \in D \cap \overline{B}(x^*, \delta)) \quad \|\Phi(x^*)^{-1} - \Phi(x)^{-1}\| \leq \alpha\gamma \|\Phi(x^*) - \Phi(x)\|$$

も成立し、 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D \cap \overline{B}(x^*, \delta)$ が $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ であれば、

$$\begin{aligned} \|\Phi_{inv}(x^*) - \Phi_{inv}(x_k)\| &= \|\Phi(x^*)^{-1} - \Phi(x_k)^{-1}\| \\ &\leq \alpha\gamma \|\Phi(x^*) - \Phi(x_k)\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となることが保証され、写像 Φ_{inv} の x^* での連続性が示された。

4 章の問題の解説

- 1 (a) (i) 「 $\langle x, x \rangle_Q \geq 0$ ($\forall x \in \mathcal{H}$)」、「 $\langle x, x \rangle_Q = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 」を示す。 Q に与えられた性質を利用して、 $\langle x, x \rangle_Q \geq \kappa \|x\|^2 \geq 0$ を得る。また、 $\langle x, x \rangle_Q = 0$ のとき、 $\kappa \|x\|^2 = 0$ から $\|x\| = 0$ となり、 $\|\cdot\|$ がノルムの定義を満たしているので、 $x = 0$ を得る。逆に $x = 0$ なら、 $\langle 0, 0 \rangle_Q = \langle 0, Q(0) \rangle = \langle 0, Q(0) \rangle + \langle 0, Q(0) \rangle$ より、 $\langle 0, Q(0) \rangle = 0$ となる。
- (ii) 「 $\langle x, y \rangle_Q = \langle y, x \rangle_Q$ ($\forall x, \forall y \in \mathcal{H}$)」を示す。 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が内積の定義を満たしていることに注意すると

$$\langle x, y \rangle_Q = \langle x, Q(y) \rangle = \langle Q(x), y \rangle = \langle y, Q(x) \rangle = \langle y, x \rangle_Q$$

を得る。2 番目の等号は、 Q に与えられた性質を利用している。また、3 番目の等号は、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が内積の定義を満たしていることを利用している。

- (iii) 「 $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_Q = \alpha \langle x, z \rangle_Q + \beta \langle y, z \rangle_Q$ ($\forall x, y, z \in \mathcal{H}, \forall \alpha, \forall \beta \in \mathbb{R}$)」を示す。 $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_Q = \langle \alpha x + \beta y, Q(z) \rangle = \alpha \langle x, Q(z) \rangle + \beta \langle y, Q(z) \rangle = \alpha \langle x, z \rangle_Q + \beta \langle y, z \rangle_Q$

- (b) まず、コーシー・シュワルツの不等式から、任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\kappa \|x\|^2 \leq \|x\|_Q^2 = \langle Q(x), x \rangle \leq \|Q(x)\| \|x\| \leq \|Q\| \|x\|^2$$

が成立するので、 $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|_Q$ は等価なノルム (定義 3.4) であることが確認できる。また、3.1 節の注意 2(c) に述べたように等価なノルムを用いる限り、「点列がある点に収束するか否かの結論」は不変なので $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ の完備性は $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q, \|\cdot\|_Q)$ の完備性も保証する。より詳しく言えば、 $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q, \|\cdot\|_Q)$ のコーシー列は $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ のコーシー列でもあり、その収束先は同じになるのである。したがって、 $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q, \|\cdot\|_Q)$ もヒルベルト空間になる。

2 定義に従って条件を確認すればよい。

3 「(a) $\Rightarrow$ (b)」 $\mathbf{x}_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) は、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty$ を満たしているとする。このとき、 $P_l := \sum_{n=1}^l \|\mathbf{x}_n\| \in \mathbb{R}$ ($l = 1, 2, 3, \dots$) が収束する実数列となるので、 $\mathbb{R}$ のコーシー列となり、 $n > m$ として、 $m \rightarrow \infty$ とすると

$$\|\mathbf{x}_{m+1}\| + \|\mathbf{x}_{m+2}\| + \dots + \|\mathbf{x}_n\| = |P_n - P_m| \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty) \quad (7)$$

となることに注意する。ところで、 $S_l = \sum_{n=1}^l \mathbf{x}_n \in X$ ($l = 1, 2, 3, \dots$) は、任意の $n > m$ 対して

$$\|S_n - S_m\| \leq \|\mathbf{x}_{m+1}\| + \|\mathbf{x}_{m+2}\| + \dots + \|\mathbf{x}_n\|$$

となるので、(7) より、 $S_l \in X$ ($l = 1, 2, 3, \dots$) は、 X のコーシー列となり、 $(X, \|\cdot\|)$ の完備性より、 X の 1 点 (z とよぶ) への収束が保証される。

「(b) $\Rightarrow$ (a)」

(証明の方針) X から任意に選んだコーシー列 z_n ($n = 1, 2, \dots$) が X の 1 点に収束することを示せばよい。実は、このことを示すには、 z_n ($n = 1, 2, \dots$) に或る部分列 $z_{\nu(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) が存在し、この部分列が X の 1 点 (z^* と記す) に収束することを示せば十分である。なぜなら、この部分列が収束するときには、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し、

$$\|z_i - z_j\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall i, j \geq N_1(\varepsilon)$$

$$(\forall k \geq N_2(\varepsilon)) \quad \begin{cases} \|z_{\nu(k)} - z^*\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \nu(k) \geq N_1(\varepsilon) \end{cases}$$

となるので

$$\|z_i - z^*\| \leq \|z_i - z_{\nu(k)}\| + \|z_{\nu(k)} - z^*\| < \varepsilon, \quad \forall i \geq N_1(\varepsilon), \forall k \in N_2(\varepsilon)$$

となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z^* \in X$ が保証されるためである。

以下、コーシー列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に X の 1 点に収束する部分列 $z_{\nu(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) が存在することを示す。任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して或る $\nu(k) \in \mathbb{N}$ が存在し、

$$i, j \geq \nu(k) \Rightarrow \|z_i - z_j\| < \frac{1}{2^k} \quad (8)$$

となっている。また、容易に確かめられるように、式 (8) の条件を満足する $\nu(k+1) > \nu(k)$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) となる $(\nu(k))_{k=1}^{\infty}$ が存在し、部分列 $(z_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ は

$$\|z_{\nu(k)} - z_{\nu(k-1)}\| < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad (k = 2, 3, \dots)$$

を満たす。ここで、

$$\mathbf{x}_k := \begin{cases} z_{\nu(k)} & \text{for } k = 1 \\ z_{\nu(k)} - z_{\nu(k-1)} & \text{for } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

とすると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_i\| &= \|z_{\nu(1)}\| + \sum_{i=2}^{\infty} \|z_{\nu(i)} - z_{\nu(i-1)}\| \\ &\leq 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 2 < \infty \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ところが、(ii) と (9) より、ある $z^* \in X$ が存在し、

$$z_{\nu(k)} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i = z_{\nu(1)} + \sum_{i=2}^k (z_{\nu(i)} - z_{\nu(i-1)}) \rightarrow z^* \in X \quad (k \rightarrow \infty)$$

となることがわかる。

- 4 問題 3 の「(a) $\Rightarrow$ (b)」の証明より、 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ がある点 $z \in X$ に収束することは明らか。また、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある自然数 N をとって

$$\|S_N - z\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon$$

とすることができる。また、項の順序を任意に変えた級数を $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\eta(i)}$ ($\eta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ は、上への 1 対 1 写像) とすると、任意の $L \in \mathbb{N}$ に対して、「 $\sum_{i=1}^L \|x_{\eta(i)}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ 」となるから、問題 3 の「(a) $\Rightarrow$ (b)」の証明と同様の理由で、 $S'_m := \sum_{i=1}^m x_{\eta(i)}$ ($m = 1, 2, \dots$) はある $z' \in X$ に収束し、 $\lim_{m \rightarrow \infty} S'_m = z'$ を満たす。ところで、 η の定義から、 $m(> N)$ を十分大きくとると、

$$\begin{cases} \{1, 2, \dots, N\} \subset \{\eta(1), \eta(2), \dots, \eta(m)\} \\ \|S'_m - z'\| < \varepsilon \end{cases}$$

となるので、

$$\|S'_m - S_N\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon$$

も成立し、

$$\|z' - z\| \leq \|z' - S'_m\| + \|S'_m - S_N\| + \|S_N - z\| < 3\varepsilon$$

を得る。 $\varepsilon > 0$ は任意に選べたので、 $z' = z$ でなければならない。

- 5 4 と類似の議論で確認できるので省略する。

- 6 (a) $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ がノルム空間の条件を満たすことを示せばよい。任意の多項式 $x \in \mathcal{P}$ に対して、ある $N_x \in \mathbb{N}$ が存在し、「 $\alpha_j^{(x)} = 0$ ($\forall j > N_x$)」となっているので、写像

$$\Phi: \mathcal{P} \ni x \mapsto (\alpha_0^{(x)}, \dots, \alpha_{N_x}^{(x)}, 0, 0, \dots) \in l^\infty$$

が定義できる。 $\Phi(\mathcal{P}) := \{\Phi(x) \in l^\infty \mid x \in \mathcal{P}\}$ (注: 4.1 節の例 1(b) 参照) とすると、 $\Phi(\mathcal{P}) \subsetneq l^\infty$ (例えば $(1, 1, 1, \dots) \in l^\infty \setminus \Phi(\mathcal{P})$) であるが $\mathcal{P}$ と $\Phi(\mathcal{P})$ は 1 対 1 に対応づけられ、さらに任意の $x, y \in \mathcal{P}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して、 $c_1\Phi(x) + c_2\Phi(y) = \Phi(c_1x + c_2y) \in \Phi(\mathcal{P})$ (左辺の和とスカラー倍は l^∞ の演算) となるので、 $\mathcal{P}$ と $\Phi(\mathcal{P})$ はベクトル空間として同型 (Φ が同型写像) になっている。このとき、 $(\Phi(\mathcal{P}), \|\cdot\|_\infty)$ がノルム空間になることは明らかなので、任意の $x \in \mathcal{P}$ に対して $\|x\| = \|\Phi(x)\|_\infty$ となることは明らかなので、 $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ もノルム空間になることが確かめられる。

- (b) 任意に固定された $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $A_n: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ が線形写像になることは明らか。また、

$$|A_n(x)| = \begin{cases} 0 = n\|0\| & (x = 0 \in \mathcal{P}) \\ |\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^{(x)}| \leq n\|x\| & (x \in \mathcal{P} \setminus \{0\}) \end{cases}$$

となるので、 A_n の作用素ノルムは $\|A_n\| \leq n$ となり、 $A_n \in B(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ が示された。さらに、任意に固定された $x \in \mathcal{P}$ に対して

$$|A_n(x)| = \begin{cases} |\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^{(x)}| \leq M_x & (n < N_x + 1) \\ |\sum_{j=0}^{N_x} \alpha_j^{(x)}| \leq M_x & (n \geq N_x + 1) \end{cases}$$

となるから残りの結果も明らか。

- (c) 点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}$ を「 $x_n(t) = \sum_{j=0}^n t^j$ ($n \in \mathbb{N}$)」のように定義すると $\|x_n\| = 1$, $N_{x_n} = n$ を満たすので

$$\|A_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n(x)\| \geq \|A_n(x_n)\| = n\|x_n\| \quad (n \in \mathbb{N})$$

となり、「 $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| = \infty$ 」が確かめられる。

(d) (b) で定義された、「ノルム空間 $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ からノルム空間 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ への有界線形写像の列 $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)」は、任意に固定された $x \in \mathcal{P}$ に対して、ある $M_x > 0$ が存在し、「 $\sup_{n \in \mathbb{N}} |A_n(x)| \leq M_x < \infty$ 」を満たすので一様有界性の定理 (定理 4.2) の前提条件「 $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ の完備性」が成立してれば (c) の結論は成立しないはずである。このことから $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ が完備でないことがわかる。

(注意) (d) の結論だけを示すのであれば、一様有界性の定理を用いない以下の初等的証明でよい。 $\mathcal{P}$ の点列「 $x_n = \sum_{j=0}^n 2^{-j} t^j \in \mathcal{P}$ ($n \in \mathbb{N}$)」を定義すると、任意の $m, n \in \mathbb{N}$ ($n > m$) に対して

$$\|x_n - x_m\| = 2^{-(m+1)}$$

となるので、 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は、 $\mathcal{P}$ のコーシー列になる。このときどんな $z \in \mathcal{P}$ をとってきても、 $N_z \in \mathbb{N}$ が存在し、任意の $n > N_z$ に対して

$$\|x_n - z\| = \|\Phi(x_n) - \Phi(z)\| \geq 2^{-(N_z+1)} > 0$$

となってしまうので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ とならない。

- 7 (a) 後に示すように例 2(c)[4.3 節] あるいは定理 5.1(II) を応用して簡単に示すことができるが、以下のように $E_n(\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$ (注: E_n の定義から E_n は常に非負の値をとる) の右辺を直接計算して整理することにより確認できる。

$$\begin{aligned} & E_n(\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \\ &= \int_0^{2\pi} \{S_n(t)\}^2 dt - 2 \int_0^{2\pi} x(t) S_n(t) dt + \int_0^{2\pi} x^2(t) dt \end{aligned}$$

の中で、 $(\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$ に関する

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n(\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) &= E_n(\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) - \int_0^{2\pi} \{x(t)\}^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} \{S_n(t)\}^2 dt - 2 \int_0^{2\pi} x(t) S_n(t) dt \end{aligned}$$

を最小化すればよいのであるが、計算を楽にするために、任意の整数 p, q に対して成立する初等的な関係³:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos pt \cos qtdt &= \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ \pi & (p = q \neq 0) \\ 2\pi & (p = q = 0) \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin pt \sin qtdt &= \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ \pi & (p = q \neq 0) \\ 0 & (p = q = 0) \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin pt \cos qtdt &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

だけでなく、 a_k, b_k の表記も利用すると、平方完成の和として

$$\begin{aligned} & \tilde{E}_n(\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ \alpha_0^2 + 2 \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) - 2a_0\alpha_0 - 4 \sum_{k=1}^n (a_k\alpha_k + b_k\beta_k) \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[(\alpha_0 - a_0)^2 + 2 \sum_{k=1}^n \{(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\} - a_0^2 - 2 \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] \\ &\geq -\pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right\} = \tilde{E}_n(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

のように表現できる。これより、 E_n を最小にするのは、 $\alpha_k = a_k, \beta_k = b_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) の場合に限られることがわかる。

³加法定理を使って三角関数の積を和で表現して計算すればよい。

[別証明] 式 (10) から $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt\right\}_{k=1}^{\infty} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt\right\}_{k=1}^{\infty}$ はヒルベルト空間 $(L^2([0, 2\pi]), \|\cdot\|_2)$ の正規直交系 (実際には 4.3 節の例 2(c) から完全正規直交系) となっているので、 $x \in C[0, 2\pi] \subset L^2([0, 2\pi])$ の部分空間

$$M := \text{span} \left(\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt \right\}_{k=1}^n \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt \right\}_{k=1}^n \right)$$

上への直交射影 $P_M(x)$ 、すなわち

$$\|x - P_M(x)\|_2 = \min_{y \in M} \|x - y\|_2 = \min_{y \in M} \int_0^{2\pi} |x(t) - y(t)|^2 dt$$

を満たす唯一の $P_M(x) \in M$ を求めればよい (定理 5.1(II) の議論の特別な例に相当する)。 M の正規直交系が与えられているので、「グラム・シュミットの直交化法 (性質 3.4 参照) の原理 (定理 5.3 の特別な場合に相当する)」を思い出せば、 $P_M(x)$ の正体は

$$\begin{aligned} (P_M(x))(t) &= \left(\int_0^{2\pi} \frac{x(\tau)}{\sqrt{2\pi}} d\tau \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\int_0^{2\pi} x(\tau) \frac{\cos k\tau}{\sqrt{\pi}} d\tau \right) \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} + \left(\int_0^{2\pi} x(\tau) \frac{\sin k\tau}{\sqrt{\pi}} d\tau \right) \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \right\} \end{aligned}$$

となり、 E_n の最小値が「 $\alpha_k = a_k, \beta_k = b_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$)」で与えられることが確かめられる。

(b) まず、準備として、よく知られた関係式

$$\left. \begin{aligned} 1 + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt &= \frac{\cos \frac{nt}{2} \sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \\ \sin t + \sin 2t + \dots + \sin nt &= \frac{\sin \frac{nt}{2} \sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}) \quad (11)$$

を示しておく。Euler の公式 : 「 $e^{it} = \cos t + i \sin t$ ($t \in \mathbb{R}, i^2 = -1$)」を用いると、等比数列の和の議論と三角関数の倍角の定理から

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^n (\cos kt + i \sin kt) &= \frac{1 - \cos(n+1)t - i \sin(n+1)t}{1 - \cos t - i \sin t} \\ &= \frac{2 \sin^2 \frac{(n+1)t}{2} - 2i \sin \frac{(n+1)t}{2} \cos \frac{(n+1)t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2} - 2i \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \left(\cos \frac{nt}{2} + i \sin \frac{nt}{2} \right) \end{aligned}$$

となり、両辺の実部と虚部を比較すれば、式 (11) の成立が確かめられる (準備終)。

式 (11) と「 $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ 」を使うと

$$q_n(t) := 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt = 2 \frac{\cos \frac{nt}{2} \sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} - 1 = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{t}{2}}$$

を得るので、任意の $x \in C[0, 2\pi]$ に対して

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) q_n(t) dt$$

のように表せる。また、固定された $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|T_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\tau \in [0, 2\pi]} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt \|x\|_{\max}$$

となるから、線形写像 $T_n : C[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ は有界線形汎関数で

$$\|T_n\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt \quad (12)$$

となっている。実は以下のように不等式 (12) の両辺は等しくなることが示される。このことを確認するには、不連続関数

$$y(t) := \begin{cases} 1 & (q_n(t) \geq 0) \\ -1 & (q_n(t) < 0) \end{cases}$$

に対して

$$\left. \begin{aligned} \|x_m\|_{max} &= \max_{\tau \in [0, 2\pi]} |x_m(\tau)| = 1 \quad (m = 1, 2, \dots) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |x_m(t) - y(t)| dt &= 0 \end{aligned} \right\}$$

を満たす関数列 $x_m \in C[0, 1]$ ($m = 1, 2, \dots$) を用いればよい⁴。このとき、

$$\begin{aligned} & \left| T_n(x_m) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \{x_m(t) - y(t)\} q_n(t) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\tau \in [0, 2\pi]} |q_n(\tau)| \int_0^{2\pi} |x_m(t) - y(t)| dt \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となるから結局

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|_{max}=1} |T_n(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt \quad (13)$$

が成立するのである。以下、式 (13) の右边を評価し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = \infty$ となることを示す。「 $|\sin \frac{t}{2}| < \frac{t}{2}$ ($\forall t \in (0, 2\pi]$)」と変数変換 $u := (n + \frac{1}{2})t$ を用いれば

$$\begin{aligned} \|T_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u} du = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u| du = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(c) (b) の議論から、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n : C[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ はバナッハ空間 $(C[0, 2\pi], \|\cdot\|_{max})$ からノルム空間 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ への有界線形写像であるが

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = \infty$$

から、数列 $(\|T_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ は有界でない。したがって、一様有界性の定理 (定理 4.2) から、

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(x)| = \infty$$

となる $x \in C[0, 2\pi]$ が存在することが確かめられる。

5 章の問題の解説

1 (a) 系 5.2 の結果を繰り返し適用し

$$\begin{aligned} x &= P_{M_2}(x) + (x - P_{M_2}(x)) \\ &= P_{M_1}(P_{M_2}(x)) + (P_{M_2}(x) - P_{M_1}(P_{M_2}(x))) + (x - P_{M_2}(x)) \end{aligned}$$

ここで

$$P_{M_2}(x) - P_{M_1}(P_{M_2}(x)) \in \{y \in M_2 \mid y \perp M_1\} \subset \{y \in \mathcal{H} \mid y \perp M_1\} = \mathcal{H} \ominus M_1$$

$$x - P_{M_2}(x) \in \{y \in \mathcal{H} \mid y \perp M_2\} \subset \{y \in \mathcal{H} \mid y \perp M_1\} = \mathcal{H} \ominus M_1$$

であるから

$$\begin{aligned} x - P_{M_1}(P_{M_2}(x)) &= x - P_{M_2}(x) + P_{M_2}(x) - P_{M_1}(P_{M_2}(x)) \\ &\in \mathcal{H} \ominus M_1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$P_{M_1}(P_{M_2}(x)) \in M_1 \quad (15)$$

⁴例題 2.4(b) で $p = 1$ とした場合と類似の議論でこのような関数列の存在が確認できる。

であることに注意する。一方

$$x = P_{M_1}(x) + (x - P_{M_1}(x)) \quad (16)$$

より、 $x - P_{M_1}(x) \in \mathcal{H} \ominus M_1$ 、 $P_{M_1}(x) \in M_1$ であるから、これを直交分解の一意性を利用して式 (14) と比較し

$$P_{M_1}(x) = P_{M_1}(P_{M_2}(x))$$

を得る。

(b) 一般化されたピタゴラスの定理より $\|P_{M_2}(x)\| \geq \|P_{M_1}(P_{M_2}(x))\|$ また、(a) から $\|P_{M_1}(P_{M_2}(x))\| = \|P_{M_1}(x)\|$ であるから $\|P_{M_1}(x)\| \leq \|P_{M_2}(x)\|$ が示された。

2 まず、 $P_{M_n}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) がコーシー列であることを示す。問題 1(a) の結果と一般化されたピタゴラスの定理より $n > m$ に対して

$$\begin{aligned} \|P_{M_m}(x) - P_{M_n}(x)\|^2 &= \|P_{M_m}(x) - P_{M_n}(P_{M_m}(x))\|^2 \\ &= \|P_{M_m}(x)\|^2 - \|P_{M_n}(P_{M_m}(x))\|^2 \\ &= \|P_{M_m}(x)\|^2 - \|P_{M_n}(x)\|^2 \end{aligned} \quad (17)$$

が成立することに注意する。また、問題 4 の結果より数列 $\|P_{M_n}(x)\| \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) は単調非増加な非負数列なので収束するので、 $\mathbb{R}$ のコーシー列となり式 (17) の右辺は、 $n, m \rightarrow \infty$ で 0 に収束し、式 (17) の左辺も 0 に収束する。このことは、 $P_{M_n}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) が $\mathcal{H}$ のコーシー列であることを示しており、極限

$$z := \lim_{n \rightarrow \infty} P_{M_n}(x) \in \mathcal{H}$$

が存在する。ところが、 M_n ($n = 1, 2, \dots$) の包含関係が単調減少なので、すべての $m \geq 1$ に対して

$$P_{M_n}(x) \in M_m \quad (\forall n \geq m)$$

であり、 M_m が閉部分空間であるから、

$$z \in M_m \quad (\forall m \geq 1)$$

したがって、 $z \in M_{-\infty}$ であることがわかる。問題の主張を示すには、 $x - z \perp M_{-\infty}$ 、すなわちすべての $y \in M_{-\infty}$ に対して $\langle x - z, y \rangle = 0$ を示せばよい。これは、以下のように示される。任意の $y \in M_{-\infty} \subset M_n$ ($\forall n \geq 1$) に対して $\langle x - P_{M_n}(x), y \rangle = 0$ ($\forall n \geq 1$) が成立し、内積の連続性 (補題 3.1) より

$$\langle x - z, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x - P_{M_n}(x), y \rangle = 0$$

が確かめられる。

3 まず、

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (M_{\infty} \ominus M_n) = \{0\} \quad (18)$$

となることを示す。任意の $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (M_{\infty} \ominus M_n)$ に対して $y \in M_{\infty}$ であり、すべての $n \geq 1$ に対して $y \perp M_n$ となることに注意する。また、任意の $z \in M_{\infty}$ (M_{∞} の定義参照) に対してこれに収束する点列 $z_m \in M_{\nu(m)} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ ($m = 1, 2, \dots$) が存在し、内積の連続性より

$$\langle y, z \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle y, z_m \rangle = 0$$

したがって $y \perp M_{\infty}$ 。然るに $y \in M_{\infty}$ であったので $y = 0$ すなわち (18) が示された。

上の議論と $(M_{\infty} \ominus M_n)$ $n = 1, 2, \dots$ が単調減少な包含関係をもつ閉部分空間列であることに注意し、さらに、問題 1 より

$$\begin{aligned} P_{M_{\infty} \ominus M_n}(x) &= P_{M_{\infty} \ominus M_n}(P_{M_{\infty}}(x)) \\ &= P_{M_{\infty}}(x) - P_{M_n}(P_{M_{\infty}}(x)) = P_{M_{\infty}}(x) - P_{M_n}(x) \end{aligned}$$

が成立することも使うと、問題 5 の結果から

$$\begin{aligned} 0 &= P_{\{0\}}(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{M_\infty \ominus M_n}(\mathbf{x}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{M_\infty}(\mathbf{x}) - P_{M_n}(\mathbf{x})) \\ &= P_{M_\infty}(\mathbf{x}) - \lim_{n \rightarrow \infty} P_{M_n}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

を得る。

- 4 (a) 非拡大写像 $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ が不動点を持ち、 $\text{Fix}(T) := \{z \in \mathcal{H} \mid T(z) = z\} \neq \emptyset$ であるとき、任意の $z \in \text{Fix}(T)$ と任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\|T(x) - z\| = \|T(x) - T(z)\| \leq \|x - z\|$$

となるので、 T は準非拡大写像になる。非拡大写像は一般に不動点を持つ保証がないことは非ゼロの $y \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ を用いて定義された写像

$$\mathcal{H} \ni x \mapsto T_y(x) := x + y \in \mathcal{H}$$

が

$$\left. \begin{aligned} \|T_y(x_1) - T_y(x_2)\| &= \|(x_1 + y) - (x_2 + y)\| = \|x_1 - x_2\| \quad (\forall x_1, x_2 \in \mathcal{H}) \\ \text{Fix}(T_y) &:= \{z \in \mathcal{H} \mid T_y(z) = z + y = z\} = \emptyset \end{aligned} \right\}$$

を満たすことから明らか。

- (b) 式 (5.65) を示せば十分である。

(「 $\subset$ 」の証明) $x \in \text{Fix}(T)$ であるとき、すべての $y \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|y - x\|^2 - \|T(y) - x\|^2 \\ &= \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle y, x \rangle - \|T(y)\|^2 - \|x\|^2 + 2\langle T(y), x \rangle \\ &= \|y\|^2 - \|T(y)\|^2 - 2\langle y - T(y), x \rangle \end{aligned}$$

となるので、「 $\text{Fix}(T) \subset (5.65)$ の右辺」の成立が確かめられる。

(「 $\supset$ 」の証明) 「 $x \in (5.65)$ の右辺」とするとき、全ての $y \in \mathcal{H}$ に対して

$$2\langle y - T(y), x \rangle \leq \|y\|^2 - \|T(y)\|^2$$

となるから、特に $y = x$ とすれば

$$\begin{aligned} 2\langle x - T(x), x \rangle &\leq \|x\|^2 - \|T(x)\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|T(x) - x + x\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|T(x) - x\|^2 - 2\langle T(x) - x, x \rangle - \|x\|^2 \end{aligned}$$

すなわち、

$$\|T(x) - x\|^2 \leq 0$$

を得る。これより、 $x \in \text{Fix}(T)$ であることが示された。

- (c) 準非拡大写像 T の不動点集合 $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ に相異なる 2 点 $z_1, z_2 \in \text{Fix}(T)$ があるとき、 $\text{Fix}(T) \geq \aleph$ であることを示せば十分。閉区間 $[0, 1]$ と z_1, z_2 を結ぶ直線分 $\Lambda(z_1, z_2) \subset \text{Fix}(T)$ は全単射 $[0, 1] \ni \lambda \mapsto \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 \in \Lambda(z_1, z_2) (\subset \text{Fix}(T))$ によって対応付けられる。閉区間 $[0, 1] = \aleph$ であるから、少なくとも $\text{Fix}(T) \geq \aleph$ が成立する。 (証明終)

- 5 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = m$ なので、 $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$ となり、任意の $y \in \mathbb{R}^m$ に対して、 $P_{\mathcal{R}(A)}(y) = y$ すなわち、定理 5.6 の線形多様体は

$$S(y) := \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - y\|_{(m)}^2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = y\}$$

となるので、定理 5.5(b) の結果を用いて、 $A^\dagger: \mathbb{R}^m \ni y \mapsto P_{S(y)}(0) \in \mathbb{R}^n$ は

$$A^\dagger(y) := P_{S(y)}(0) = A^t(\lambda_1, \dots, \lambda_m)^t \quad (\forall y \in \mathbb{R}^m)$$

(ただし、 $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ は

$$AA^t(\lambda_1, \dots, \lambda_m)^t = y$$

を満たす [注: A の行ベクトルが一次独立なので AA^t は正則]) と表せる。したがって、 $A^\dagger$ は

$$A^\dagger(y) = A^t(AA^t)^{-1}y \quad (\forall y \in \mathbb{R}^m)$$

と表せる。

6章の問題の解説

- 1 例題 2.4(b) の証明に用いた $f_n \in C[-1, 1]$ ($n = 1, 2, \dots$) は、 $(C[-1, 1], d_2)$ のコーシー列であるが $C[-1, 1]$ の中に極限は存在しないことに注意する。

(a) 任意の $y \in C_2[-1, 1]$ に対して

$$f(y) = \int_0^1 y(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 y(t)f_n(t)dt$$

となるので、定理 6.3(b) より、 $f \in X^*$ となる。

(b) 「 $f(y) = \langle y, z \rangle$ ($\forall y \in X$)」を満たす $z \in X$ が存在するなら、定理 6.3(c)[式 (6.21) の関係] より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_2(f_n, z) = 0$$

が成立しなければならない。ところが、例題 2.4(b) の証明で見たように、 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の極限は $X = C_2[-1, 1]$ に存在しないので、条件を満たす $z \in X$ は存在しない。

- 2 $f = O$ (零写像) なら、 $f = J_0$ となることは明らかなので、以下、 $f \in X^* \setminus \{O\}$ とする。

- 「(a) (b) の証明」(a) の条件を満足する $x \in X$ が存在するとき、点列 $x_n := x$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) は、定理 6.2(a) の条件を満たすので、定理 6.2(b) は、 $z_n := \|f\|x_n = \|f\|x \in X$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) は、

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{z_n}(y) = J_{\|f\|x}(y), \quad \forall y \in X$$

を保証する。このことから、 $z := \|f\|x \in X$ によって (b) が成立することがわかる。

- 「(b) (a) の証明」(b) の条件を満足する $z \in X$ が存在するとき、 $\|f\| = \|z\|_X$ [式 (3.26) 参照] となるので、

$$f\left(\frac{z}{\|f\|}\right) = \left\langle \frac{z}{\|f\|}, z \right\rangle = \frac{\|z\|_X^2}{\|f\|} = \frac{\|f\|^2}{\|f\|} = \|f\|$$

となる。このことから、 $x := \frac{z}{\|f\|} \in X$ によって、(a) が成立することが確かめられる。

- 3 定理 6.3(a) より、任意の $f \in X^*$ に対して、 X の Cauchy 列 $(z_n)_{n=1}^\infty$ が存在し、

$$\begin{aligned} f(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y, z_n \rangle, \quad \forall y \in X \\ \|f\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\|_X \end{aligned}$$

となる。更に、 X の完備性より、 $z := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in X$ が存在し、

$$\begin{aligned} \langle y, z \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y, z_n \rangle, \quad \forall y \in \mathcal{H} \\ \|z\|_{\mathcal{H}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

となるので、 z は確かに、式 (6.35), (6.36) を満たす。

このような性質を満たす z の唯一性は、同様な性質を持つ $z' \in X$ があると仮定するとき

$$\begin{aligned} f(y) &= \langle y, z \rangle = \langle y, z' \rangle, \quad \forall y \in X \\ \Rightarrow \langle y, z - z' \rangle &= 0, \quad \forall y \in X \\ \Rightarrow \|z - z'\|_X^2 &= \langle z - z', z - z' \rangle = 0 \\ \Rightarrow z &= z' \end{aligned}$$

となることから確かめられる。

- 4 $x \in K$ のとき、 x の K 内の最良近似点は x そのものなので最良近似点の唯一性は明らか。一方、 $x \notin K$ のとき、 y^* の他に $y^{**} \in K$ も最良近似の条件を満たすと仮定すると、 K の凸性から、 $\frac{y^* + y^{**}}{2} \in K$ となるので、三角不等式を使って

$$\begin{aligned} d(x, K) &\leq \left\| x - \frac{y^* + y^{**}}{2} \right\|_X = \left\| \frac{1}{2}(x - y^*) + \frac{1}{2}(x - y^{**}) \right\|_X \\ &\leq \frac{1}{2} \|x - y^*\|_X + \frac{1}{2} \|x - y^{**}\|_X = d(x, K) \end{aligned}$$

を得る。明らかに、上の三角不等式の等号成立を要請しているので、性質 3.3(c) から $x - y^* = \rho(x - y^{**})$ ($\exists \rho \in [0, \infty)$) となるのがわかる。ところが、 $\|x - y^*\|_X = d(x, K) = \|x - y^{**}\|_X$ より、 $\rho = 1$ 。したがって、 $y^* = y^{**}$ でなければならない。

- 5 (a) $x \in H$ のとき、 $d(x, H) = 0$ となり、式 (6.37) の成立は明らかなので、以下、 $x \in X \setminus H$ とする。

- (i) まず、 $c = 0$ となる特別な場合に、式 (6.37) が成立することを示す。任意の $y \in H$ に対して $f(y) = 0$ となるから

$$\frac{1}{\|f\|} |f(x)| = \frac{1}{\|f\|} |f(x - y)| \leq \frac{1}{\|f\|} \|f\| \|x - y\|_X = \|x - y\|_X \quad (\forall y \in H)$$

となり、

$$\frac{1}{\|f\|} |f(x)| \leq \inf_{y \in H} \|x - y\|_X = d(x, H)$$

が成立する。「 $\frac{1}{\|f\|} |f(x)| = \inf_{y \in H} \|x - y\|_X$ 」を示すには、任意に選んだ $\varepsilon \in (0, \|f\|)$ に対して $\|x - y\|_X < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon} |f(x)|$ となる $y \in H$ の存在を云えばよい。実際に、 $\|f\| = \sup_{\|x\|_X=1} |f(x)|$ より、

$$\left. \begin{aligned} \|z\|_X &= 1 \\ f(z) &= |f(z)| > \|f\| - \varepsilon > 0 \end{aligned} \right\}$$

を満たす $z \in X$ が存在するので、 $y := x - \frac{f(x)}{f(z)} z \in H$ が

$$\|x - y\|_X = \left\| \frac{f(x)}{f(z)} z \right\|_X = \frac{|f(x)|}{|f(z)|} < \frac{|f(x)|}{\|f\| - \varepsilon}$$

を満たすことがわかり、 $c = 0$ のとき、式 (6.37) の成立が確かめられた。

- (ii) $c \neq 0$ のとき、任意に選んだ $x_0 \in H$ を用いて

$$\begin{aligned} H_0 &:= H - x_0 \\ &= \{v - x_0 \in X \mid f(v) = c\} = \{u \in X \mid f(u) = 0\} \end{aligned}$$

とおけば、(i) の結果が利用できて

$$\begin{aligned} d(x, H) &= \inf_{y \in H} \|x - y\| = \inf_{y \in H} \|x - x_0 - (y - x_0)\| \\ &= \inf_{u \in H_0} \|x - x_0 - u\| = d(x - x_0, H_0) \\ &= \frac{1}{\|f\|} |f(x - x_0)| = \frac{1}{\|f\|} |f(x) - c| \end{aligned}$$

となることが確かめられた。

- (b) 定理 5.1 より、 $P_H(x)$ の存在性と唯一性は明らか。また、

$$f\left(x - \frac{\langle x, z \rangle - c}{\|z\|_{\mathcal{H}}^2} z\right) = \langle x, z \rangle - \frac{\langle x, z \rangle - c}{\|z\|_{\mathcal{H}}^2} \langle z, z \rangle = c$$

と

$$\left\| \frac{\langle x, z \rangle - c}{\|z\|_{\mathcal{H}}^2} z \right\|_{\mathcal{H}} = \frac{|\langle x, z \rangle - c|}{\|z\|_{\mathcal{H}}} = \frac{1}{\|f\|} |f(x) - c| = d(x, H) \quad [(a) \text{ より}]$$

から、 $P_H(x)$ の表現の正しさも確かめられた。

(c) 「(i) $\Rightarrow$ (ii) の証明」: (a) より、

$$\|x - P_H(x)\|_X = \frac{1}{\|f\|} |f(x) - c| = \frac{1}{\|f\|} |f(x) - f(P_H(x))|$$

となるので、

$$\|f\| = \frac{|f(x - P_H(x))|}{\|x - P_H(x)\|_X} = f\left(\sigma \frac{x - P_H(x)}{\|x - P_H(x)\|_X}\right)$$

ただし、 $\sigma := \operatorname{sgn}(f(x - P_H(x)))$ となることがわかり、 $z := \sigma \frac{x - P_H(x)}{\|x - P_H(x)\|_X}$ でノルム到達であることがわかった。

「(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) の証明」: 章末問題 2 より明らか。

「(iii) $\Rightarrow$ (i) の証明」: $f(y) = \langle y, z \rangle$ ($\forall y \in X$) であるとき、式 (6.19) [(例 1 の式 (3.26) 参照)] より、 $\|f\| = \|z\|_X$ であり、また、任意の $x \in X$ に対して、 $\lambda = \frac{c - \langle x, z \rangle}{\|z\|_X^2}$ は

$$z_0 := x + \lambda z \in H \quad (\Leftrightarrow \langle x, z \rangle + \lambda \langle z, z \rangle = c)$$

を満足するので

$$z_0 := x + \frac{c - \langle x, z \rangle}{\|z\|_X^2} z = x + \frac{c - f(x)}{\|f\|^2} z$$

について

$$\|x - z_0\|_X = \frac{|c - f(x)|}{\|f\|^2} \|z\|_X = \frac{|c - f(x)|}{\|f\|} = d(x, H)$$

となる (最後の等号は (a) による)。したがって、 $P_H(x) = z_0$ であることがわかった。