

問題のヒント集

問題 1.1

- (1) (デジタル) 信号処理，画像処理に関連した文献を調査．
- (2) 問題の指示に直接的に従い実施．

問題 3.1

3.3.1 項の矩形パルスと同様の手順で実施．

問題 3.2

- (1) (3.29) 式に直接的に従うと，ただちに (3.40) 式を得る．
- (2) 図 3.10 のバイアスされた矩形波信号は，バイアス分（直流成分）を除去する場合には，(3.29) 式の矩形波信号を K 倍した信号となる．バイアス分（直流成分）は信号の平均値を意味する．

問題 3.3

(3.27) 式に直接的に従って実施．具体的には (3.52)，(3.53) 式の処理を参考．

問題 3.4

- (1) 図 3.13，3.14 のバイアスされたのこぎり波信号からバイアス分（直流成分）を除去し，この上で K 倍すると，図 3.15(a) の信号を得る．
- (2) 奇関数の性質を利用して，直接実施．

問題 3.5

- (1) 問題の指示に直接的に従い実施．
- (2) ① 偶関数の性質を利用して実施．または，バイアスされた四半波対称偶関数の性質を利用して実施．
② 問題の指示に直接的に従い実施．
- (3) 三角フーリエ級数の元来の展開式に従い実施．(3.66) 式の利用も可能．

問題 3.6

問題の指示に直接的に従い実施．

問題 3.7

積分の実施には，(3.93) 式に示した部分積分のテクニックを活用．

問題 4.1

- (1) フーリエ積分の存在定理 I，(4.14) 式を参照．
- (2) 4.5 節で解説するデルタ関数 $\delta(t)$ を検討せよ．
- (3) 特になし．

問題 4.2

- (1) (4.27a) 式の関係を利用．
- (2) フーリエ変換における指数関数に関し，オイラーの公式すなわち次式を活用．

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

また，フーリエ変換の実施に際し，余弦信号は偶関数，正弦信号は奇関数である点を利用．

問題 4.3

- (1) 直接証明には，変数置換 $t = -\tau$ を利用．
- (2) 時間推移定理とオイラーの公式を活用．
- (3) オイラーの公式と周波数推移定理を活用．
- (4) 問題の指示に直接的に従い実施．
- (5), (6) とともに時間畳込み定理を活用．

問題 4.4

(4.63) 式に追加条件 $\omega = 0$ を付加．

問題 4.5

- (1) (4.72) 式の指数信号に対称定理を適用．
- (2) 定義式を直接利用．(4.73) 式を参照．

問題 4.6

- (1) 原関数は奇関数である点を利用 .
- (2) 問題の指示に直接的に従い実施 .
- (3) 時間畳込み定理あるいは周波数畳込み定理を活用 .
- (4) 問題の指示に直接的に従い実施 .

問題 4.7

- (1) 余弦関数をオイラーの公式を利用して指数表現し, 問題 4.5 (2) の結果と周波数推移定理を活用 .
- (2) 正弦関数をオイラーの公式を利用して指数表現し, 周波数推移定理を活用しフーリエ変換を実施 .

問題 4.8

- (1) 時間微分定理を活用 .
- (2) 時間畳込み定理を活用 .

問題 4.9

(4.146), (4.147) 式の結果を直接利用 .

問題 6.1

(1), (2) とともに, 問題の指示に直接的に従い実施 .

問題 7.1

(1), (2) とともに, ラプラス変換の定義式を参考に絶対積分可能性を検証 .

問題 7.2

- (1), (2) とともに問題の指示に直接的に従い実施 .
- (3), (4) とともに時間畳込み定理を活用 .
- (5) 時間畳込み定理と時間微分定理を活用 . 時間微分定理の活用に際しては, 畳込み積分の次の性質を利用 .

$$f_1(t) * f_2(t)|_{t=0_+} = 0$$

問題 7.3

- (1) ~ (6) いずれも問題の指示に直接的に従い実施 .

(7) 図 7.4 (時間推移した原関数) を参照 .

問題 7.4

- (1), (2) とともに問題の指示に直接的に従い実施 .
 (3) ラプラス変換の定義域を検討 .
 (4) 以下のように証明される . ラプラス変換の定義より ,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-st} dt \quad (\text{A7.1})$$

変数置換 $st = x^2$ を実施すると , 次の関係を得る .

$$\sqrt{t} = \frac{x}{\sqrt{s}}, \quad \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{s}} dx \quad (\text{A7.2})$$

(A7.2) 式を (A7.1) 式に用いると , 次の所期の解を得る .

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad (\text{A7.3})$$

なお , 無限積分の評価には , 次の関係を利用した ((4.106) 式参照) .

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{A7.4})$$

(5) 以下のように証明される .

- ① 簡単のため , 次式で定義した時間関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めることを考える .

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right) \quad (\text{A7.5})$$

(A7.5) 式のラプラス変換 $F(s)$ は , 定義式より

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t} - st\right) dt \quad (\text{A7.6})$$

次の変数置換

$$\tau = \frac{a}{2\sqrt{t}}, \quad d\tau = -\frac{a}{4\sqrt{t^3}} dt \quad (\text{A7.7})$$

を考慮するならば , $F(s)$ は , 以下のように整理される .

$$\begin{aligned}
F(s) &= -\frac{4}{a} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\tau^2 - \frac{a^2 s}{4\tau^2}\right) d\tau \\
&= \frac{4}{a} \int_0^{\infty} \exp\left(-\tau^2 - \frac{a^2 s}{4\tau^2}\right) d\tau \\
&= \frac{4}{a} e^{-a\sqrt{s}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\tau - \frac{a\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2\right) d\tau \quad (\text{A7.8})
\end{aligned}$$

ここで，(A7.8) 式の無限積分の評価を行う．本無限積分は，次の変数置換

$$b = \frac{a\sqrt{s}}{2}, \quad x = \frac{b}{\tau}, \quad d\tau = -\frac{b}{x^2} dx \quad (\text{A7.9})$$

を考慮するならば，以下のように再表現される．

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\tau - \frac{a\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2\right) d\tau \\
&= \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\tau - \frac{b}{\tau}\right)^2\right) d\tau \\
&= \int_0^{\infty} \frac{b}{x^2} \exp\left(-\left(x - \frac{b}{x}\right)^2\right) dx \quad (\text{A7.10})
\end{aligned}$$

(A7.10) 式を 2 倍すると次式を得る．

$$\begin{aligned}
&2 \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\tau - \frac{b}{\tau}\right)^2\right) d\tau \\
&= \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{b}{x^2}\right) \exp\left(-\left(x - \frac{b}{x}\right)^2\right) dx \quad (\text{A7.11})
\end{aligned}$$

(A7.11) 式の右辺の変数に関して，次の変数置換

$$y = x - \frac{b}{x}, \quad dy = \left(1 + \frac{b}{x^2}\right) dx \quad (\text{A7.12})$$

を実施すると，(A7.11) 式は，以下のように評価される．

$$\begin{aligned}
&2 \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\tau - \frac{b}{\tau}\right)^2\right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy \\
&= 2 \int_0^{\infty} \exp(-y^2) dy = \sqrt{\pi} \quad (\text{A7.13})
\end{aligned}$$

(A7.13) 式を (A7.8) に用いると, $F(s)$ は, 以下のように評価される.

$$F(s) = \frac{4}{a} e^{-a\sqrt{s}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{2\sqrt{\pi}}{a} e^{-a\sqrt{s}} \quad (\text{A7.14})$$

(A7.14) は, 問題①の解を意味する.

② ①のラプラス変換対に対して, 複素微分定理を活用すると, ただちに本問題の解を得る.

③ ①のラプラス変換対に対して, 時間積分定理を活用すると, ただちに本問題の解を得る.

問題 8.1

(1) ~ (3) のいずれも, 問題の指示に直接的に従い実施.

問題 9.1

例題と同様に実施. 各々の解は以下となる.

$$\textcircled{1} \quad y(t) = e^{-at} - \cos t + a \sin t$$

$$\textcircled{2} \quad y(t) = 1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$$

$$\textcircled{3} \quad y(t) = 1 - 3e^{-t} + 2e^{-2t}$$

$$\textcircled{4} \quad y(t) = 1 + 21e^{-2t} - 16e^{-3t}$$

問題 9.2

例題と同様に実施. 各々の解は以下となる.

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 + 21e^{-2t} - 16e^{-3t} \\ -42e^{-2t} - 48e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t}(\cos 2t + 3 \sin 2t) \\ 2 + e^{-t}(3 \cos 2t - \sin 2t) \end{bmatrix}$$

問題 9.3

① ~ ④ のいずれも, 問題の指示に直接的に従い実施.