付録 C

演習問題のヒントまたは略解

問題 1.1:　その不等式の左辺の r についての判別式が負になることを用いる.

問題 1.2:　$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる場合を考えよ。

問題 1.4:　$X^T = \sum_{i,j} \overline{x^{i,j}} |u_i\rangle\langle u_j|$ となることに注意せよ。

問題 1.5:　積の行列成分の微分を考える。

問題 1.12:　**b**: $\log\rho_i, \log\sigma_i$ に **a** を適用する。**c**:　この場合 (1.17) が $(\sigma_A\otimes\sigma_B)(\rho_A\otimes\rho_B)(I-(\sigma_A\otimes\sigma_B)) = 0$ と同値であることと、(1.18) が $\sigma_i\rho_i(I-\sigma_i) = 0,\ i = A, B$ と同値であることを利用する。**d**:　2 つ目の条件から 1 つ目の条件を示すには最初の 3 つの式が 0 となることから ρ と σ が $P_\rho P_\sigma, (I-P_\rho)P_\sigma, P_\rho(I-P_\sigma), (I-P_\rho)(I-P_\sigma)$ でブロック対角化できることを利用する。

問題 1.16:　行列式が負の時はその行列は半正定値にはならない.

問題 2.2:　$\mathrm{P}_Y(1) = \lambda, \mathrm{P}_Y(0) = 1-\lambda, \mathrm{P}_{X|Y=1} = p, \mathrm{P}_{X|Y=0} = p'$ の場合を考える。

問題 2.6:　ランクが 1 となる確率遷移行列を定理 2.1 に適用する。

問題 2.5:　$x - \log x - 1$ の増減表を書く。

問題 2.8:　$\sum_j \sum_i Q^i_j |p_i - q_i| \ge \sum_j |\sum_i Q^i_j (p_i - q_i)|$ を用いる。

問題 2.9:　$x \ge y$ の場合と $x < y$ の場合に分けて示す。

問題 2.10:　**a**: $|p_i - q_i| = |\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i}||\sqrt{p_i} + \sqrt{q_i}|$ を用いる。**b**: $p_i + q_i \ge 2\sqrt{p_i}\sqrt{q_i}$ を用いる。

問題 2.11:　確率分布 p_i の下で確率変数 $\sqrt{q_i/p_i}$ と凸関数 $-\log x$ について Jensen の不等式適用する。

問題 2.12:　(2.17) を参考にする。

問題 2.14:　$\sum_i p_i q_i^{-s} = \mathrm{Tr}\,\rho\sigma^{-s}$.

問題 2.17:　X のスペクトル分解 M を考え P^M_ρ に Jensen の不等式を適用する。

問題 2.20: $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$ となることに注意せよ。

問題 2.21: **b**: 各 θ_i について $[0, 2\pi]$ 間で積分して平均値に注目する。そして $\langle u|v\rangle$ が各 θ_i について連続であることに注意する。

問題 2.26: 近似式 $\sqrt{p_{\theta+\epsilon}(\omega)} \cong \sqrt{p_\theta(\omega)}\sqrt{1+l_\theta(\omega)\epsilon+\frac{1}{2}\frac{d^2 p_\theta(\omega)}{d\theta^2}\epsilon^2}$ を用いる。

問題 2.28: **b**: $\eta(\theta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_\omega X(\omega)p_\theta(\omega)$ の両辺を微分する。**e**: $\frac{d\theta}{d\eta} = J_\eta$ となることを用いる。**i**: 微分方程式の解の一意性を用いる。

問題 2.30: (2.8) と (2.50) を組み合わせると直ちに得られる。

問題 2.31: $n \geq m$ のときは $n, n-1, \ldots, m+1 \geq m$ から得られる。$n < m$ のときは $\frac{1}{m}, \frac{1}{m-1}, \ldots, \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ から得られる。

問題 2.34: 問題 **2.33** の **b** を用いる。

問題 2.35: **a**: 定理 2.5 の (2.72) で $\geq$ の証明を参考にする。**b**: 問題 **2.33** と問題 **2.34** を用いる。**c**: $\lim \frac{-1}{n}\log p_\theta^n\{X^n(\omega^n) > \eta(\theta)+\epsilon\} \leq D(p_{\eta(\theta)+\epsilon}\|p_{\eta(\theta)})$ を示す.

問題 3.1: $\mathrm{Tr}\,|X|$ は X の固有値の絶対値の和に等しいことに注意せよ。

問題 3.3:

$$
\begin{aligned}
& D\left(\mathrm{P}_{\rho^{\otimes n}}^{\boldsymbol{M}^n}\middle\|\mathrm{P}_{\sigma^{\otimes n}}^{\boldsymbol{M}^n}\right) \\
=& \sum_{\omega_n}\left(\prod_{k=1}^n \mathrm{Tr}\, M_{k,\omega_n}^n \rho\right)\log\left(\prod_{k=1}^n \mathrm{Tr}\, M_{k,\omega_n}^n \rho\right) - \log\left(\prod_{k=1}^n \mathrm{Tr}\, M_{k,\omega_n}^n \sigma\right) \\
=& \sum_{\omega_n}\left(\prod_{k=1}^n \mathrm{Tr}\, M_{k,\omega_n}^n \rho\right)\sum_{k=1}^n\left(\log \mathrm{Tr}\, M_{k,\omega_n}^n\rho - \log \mathrm{Tr}\, M_{k,\omega_n}^n\sigma\right) \\
=& \sum_{\omega_n}\sum_{k=1}^n \mathrm{Tr}\, a_{k,\omega_n} M_{k,\omega_n}^n \rho\left(\log \mathrm{Tr}\, a_{k,\omega_n} M_{k,\omega_n}^n\rho - \log \mathrm{Tr}\, a_{k,\omega_n} M_{k,\omega_n}^n\sigma\right) \\
=& \sum_{k=1}^n\sum_{\omega_n} \mathrm{Tr}\, a_{k,\omega_n} M_{k,\omega_n}^n \rho\left(\log \mathrm{Tr}\, a_{k,\omega_n} M_{k,\omega_n}^n\rho - \log \mathrm{Tr}\, a_{k,\omega_n} M_{k,\omega_n}^n\sigma\right) \\
=& \sum_{k=1}^n D\left(\mathrm{P}_{\rho}^{\boldsymbol{M}^{n,k}}\middle\|\mathrm{P}_{\sigma}^{\boldsymbol{M}^{n,k}}\right)
\end{aligned}
$$

問題 3.4: **a**(3.25) については $\{\sigma^{\otimes n} \leq e^{-na}\}\,\sigma^{\otimes n}\,\{\sigma^{\otimes n} \leq e^{-na}\} \leq \{\sigma^{\otimes n} \leq e^{-na}\}$ $(\sigma^{\otimes n})^s e^{-n(1-s)a}\,\{\sigma^{\otimes n} \leq e^{-na}\}$ となることを用いる。(3.24) については補題 3.6 を適用する. **b**: $r = -(\phi(s)-(1-s)a)$ とおくと、$\frac{-sr-\phi(s)}{1-s} = -(\phi(s)+sa)$ となることを用いる。**d**: $(\kappa_{\sigma^{\otimes n}}(\rho^{\otimes n}))^{-s} \leq (n+1)^d(\rho^{\otimes n})^{-s}$ となることを示す。**e**: **b** のヒントを参照のこと。

問題 3.5: (3.24) 及び (3.25) に $a=0$ を代入し, 極限 $s \to 1$ を取る.

問題 3.6: $R \stackrel{\mathrm{def}}{=} B(r|\rho\|\sigma) > \inf_{\tau:D(\tau\|\sigma)<r} D(\tau\|\rho)$ とすると、$D(\tau\|\sigma) < r$, $D(\tau\|\rho) < R$ となる密度行列 τ が存在する。T_n を $\lim \frac{-1}{n}\log \mathrm{Tr}\,\rho^{\otimes n}T_n = R$ $\lim \frac{-1}{n}\log \mathrm{Tr}\,\sigma^{\otimes n}(I-T_n) = r$ をみたすとすると、補題 3.5 より $\lim \mathrm{Tr}\,\tau^{\otimes n}(I-$

$T_n) = 1 \lim \mathrm{Tr}\, \tau^{\otimes n}(I - (I - T_n)) = 1$ となり矛盾が生じる。

問題 3.8: **a**: Cramér の定理を用いよ。**d**: $\exp(-(s\phi'(s) - \phi(s))) = \sum_x p(x) \left(\frac{1}{a}\frac{p(x)}{q(x)}\right)^{-s} \exp(-s(\phi'(s) + \log a))$ となることに注意せよ。**g**: $0 \le T \le I$ となる行列 T が $\exp(-r + \log q\{\frac{p(x)}{q(x)} = a\})\{\frac{p(x)}{q(x)} = a\}$ の場合を考える。

問題 3.9: **a**: ρ と σ が可換の場合には (3.30) で等号が成立することを用いよ。**c**: $r = r_s$ の場合に注目する。

問題 4.1: W_p の小さい方の固有値が最も大きくなる p を考える。

問題 4.2:

$$
\begin{aligned}
& I(p_A, W^A) + I(p_B, W^B) - I(p, W^A \otimes W^B) \\
=& \sum_{x_A, x_B} p_A(x_A) p_B(x_B) D(W^A_{x_A} \otimes W^B_{x_B} \| W^A_{p_A} \otimes W^B_{p_B}) \\
& - \sum_{x_A, x_B} p(x_A, x_B) D(W^A_{x_A} \otimes W^B_{x_B} \| W^A_{p_A} \otimes W^B_{p_B}) \\
& + \sum_{x_A, x_B} p(x_A, x_B) D(W^A_{x_A} \otimes W^B_{x_B} \| W^A_{p_A} \otimes W^B_{p_B}) \\
& - \sum_{x_A, x_B} p(x_A, x_B) D(W^A_{x_A} \otimes W^B_{x_B} \| \left(W^A \otimes W^B\right)_p) \\
=& \sum_{x_A, x_B} \left(p_A(x_A) p_B(x_B) - p(x_A, x_B)\right) \left(D(W^A_{x_A} \| W^A_{p_A}) + D(W^B_{x_B} \| W^B_{p_B})\right) \\
& + \sum_{x_A, x_B} p(x_A, x_B) \Bigg(- \mathrm{Tr} \left(W^A_{x_A} \otimes W^B_{x_B}\right) \log \left(W^A_{p_A} \otimes W^B_{p_B}\right) \\
& + \mathrm{Tr} \left(W^A_{x_A} \otimes W^B_{x_B}\right) \log \left(W^A \otimes W^B\right)_p \Bigg) \\
=& D\left(W^A_{p_A} \otimes W^B_{p_B} \middle\| \left(W^A \otimes W^B\right)_p\right) \ge 0
\end{aligned}
$$

問題 4.3: (4.13) において $\le$ は不等式 $I(\boldsymbol{M}, p, W) \le I(p, W)$ より自明である。$\ge$ の証明では $C(W)$ の定義に注目して Fano の不等式を用いる。

問題 4.4: ラグランジュの未定乗数法を用いる。

問題 4.5: $(A - cB)^*(A - cB) \ge 0$ となることから，$A^*B + B^*A \le c^{-1} A^*A + c\, B^*B$ が成立する.

問題 4.6: $c = \sqrt{\beta/(\alpha + \beta)}$ の場合を考える。

問題 4.7: (4.29) の右辺の第 1 項に補題 3.6 を適用する。

問題 4.10: (4.29) の右辺に対して，補題 3.1 を用いて示す.

問題 4.11: **a**: $A = -nR$ とおく。**b**: (4.24) において $T_n = \{\kappa_{S^{\otimes n}}(R^{\otimes n}) - N_n S^{\otimes n} \ge 0\}$ とおいて問題 **3.4** の **c,d** の議論を用いる。

問題 4.12: N_n 個の信号のなかから、誤り確率を小さい順に並べ $N_n/2$ 番目までのものの誤り確率は平均誤り確率の 2 倍より小さいことに注目する。

問題 5.1: $\mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_B$ を $\mathcal{H}_D$ とし, $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上の置換に対応するユニタリ行列 $W : u \otimes v \mapsto v \otimes u$ を考え, $V \stackrel{\mathrm{def}}{=} (W \otimes I_C)U$ とおく.

問題 5.3: $|\omega\rangle$ から生成されるヒルベルト空間 $\mathcal{H}_B$ を考え, $W_\omega = |\omega\rangle\langle\omega|$ となるエンタングルメント破壊通信路 に定理 5.1 の条件⑤を適用する．最後に, 測定 $\{|\omega\rangle\langle\omega| \otimes I_C\}$ を考える.

問題 5.10: **a**: Schwarz の不等式を用いる。）**c**: $|\rho^{1/2}\sigma^{1/2}| = U\rho^{1/2}\sigma^{1/2}$ となるように U を選ぶ。$|\operatorname{Tr} U\rho^{1/2}M_i\sigma^{1/2}| \geq \operatorname{Tr} U\rho^{1/2}M_i\sigma^{1/2}$ となることに注意せよ。

問題 5.11: $\rho^{1/2}U^*\sigma^{-1/2}$ のスペクトル分解 $\sum_i \lambda M_i$ は $M_i^{1/2}\sigma^{1/2} = \lambda_i M_i^{1/2}\rho^{1/2}U^*$ を満たすことに注意せよ。

問題 5.12: **b**: 問題 **5.11** のヒントを見よ。

問題 5.13: $d_1(\rho,\sigma) \geq b^2(\rho,\sigma)$ の証明を参考にする。

問題 5.14: POVM M を (5.20) で等号を満たす POVM とする。そして、$\mathrm{P}^M_\rho, \mathrm{P}^M_\sigma$ について (2.14) を適用すると $d_1(\mathrm{P}^M_\rho, \mathrm{P}^M_\sigma) \geq b^2(\mathrm{P}^M_\rho, \mathrm{P}^M_\sigma)$ を得る。最後に (5.21) を加えることで $d_1(\rho,\sigma) \geq b^2(\rho,\sigma)$ を得る。

問題 5.17: **c**: 2 値測定 $\{P, I-P\}$ に対して、量子相対エントロピーの情報処理不等式を適用する。

問題 5.18: ρ_{mix} を $\mathcal{H}_B$ 上の完全混合状態とし、相対エントロピー $D(\rho_{A,B,C}\|\rho_{\mathrm{mix}} \otimes \rho_{A,C})$ と $\mathcal{H}_C$ についての部分トレースを考える。

問題 5.20: $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ 上の状態 $\begin{pmatrix} p_1\rho_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_k\rho_k \end{pmatrix}$ を考える。

問題 5.21: 参照系を $\mathcal{H}_R$ とする $\rho_{A,B}$ の純粋状態化を $\rho_{A,B,C}$ とすると、劣加法性 (5.35) より

$$H(\rho_{A,B}) - H(\rho_A) + H(\rho_B) = H(\rho_C) - H(\rho_{B,C}) + H(\rho_B) \geq 0$$

となる。

問題 5.19: **a**: (5.31) を用いる。

問題 5.22: **a**: 両辺を ϵ について微分する。

問題 5.23: **a**: 問題 **5.22** の **b** を用いる。**b**: $|\eta(a_1) - \eta(b_1)| \leq \eta(1/e) = 1/e$ となることに注意せよ。**c**: $\frac{1}{2}\log 2 = 0.34658 < 1/e = 0.36792$ を用いよ。

問題 5.24: $I(p,W) = \sum_x p(x)(H(W_p) - H(W_x))$ となること、及び η_0 が凹（上に凸）であることに注意せよ。

問題 5.25: (8.41) 及び補題 3.7 を用いる。

問題 6.4: 等号が成立するとすると $[\rho, A] = 0$ であるから，適当な行列 X' を選ぶと $A = \rho X' = X'\rho$ となる．一方，各 M_i と可換なエルミート行列 X で

$A = 1/2(\rho X + X\rho)$ となるものが取れる．$1/2(\rho(X - X') + (X - X')\rho) = 0$ であるから，$\rho(X - X') = (X - X')\rho = 0$ となる．よって $A = \rho X = X\rho$ となる。

問題 6.5:　$\|X\rho Y\|_1 = \mathrm{Tr}\, X\rho Y U_m$ となるユニタリ行列 U_m が存在することに注意せよ。

問題 6.6:　**b**:　$\sigma = U^*\rho U$ とおき $\mathrm{Tr}\,\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma} \le \mathrm{Tr}\,|\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}|$ となることと問題 **2.6** に注目する。

問題 6.7:

$$
\begin{aligned}
&\left(\|X \otimes I_{B,C} - U^*(I_{A,C} \otimes Y)U\|^{(e)}_{\rho\otimes\rho_0,x}\right)^2 \\
=&\left(\|X \otimes I_{B,C}\|^{(e)}_{\rho\otimes\rho_0,x}\right)^2 - \langle X \otimes I_{B,C}, U^*(I_{A,C} \otimes Y)U\rangle^{(e)}_{\rho\otimes\rho_0,x} \\
&- \langle U^*(I_{A,C} \otimes Y)U, X \otimes I_{B,C}\rangle^{(e)}_{\rho\otimes\rho_0,x} + \left(\|U^*(I_{A,C} \otimes Y)U\|^{(e)}_{\rho\otimes\rho_0,x}\right)^2 \\
=&\left(\|X\|^{(e)}_{\rho,x}\right)^2 \left(\|I_{B,C}\|^{(e)}_{\rho\otimes\rho_0,x}\right)^2 - \left(\langle U^*(I_{A,C} \otimes Y)U, X \otimes I_{B,C}\rangle^{(e)}_{\rho\otimes\rho_0,x}\right)^* \\
&- \langle U^*(I_{A,C} \otimes Y)U, X \otimes I_{B,C}\rangle^{(e)}_{\rho\otimes\rho_0,x} + \left(\|I_{A,C} \otimes Y\|^{(e)}_{U\rho\otimes\rho_0 U^*,x}\right)^2 \\
=&\left(\|X\|^{(e)}_{\rho,x}\right)^2 \left(\|I_{B,C}\|^{(e)}_{\rho,x}\right)^2 - (\mathrm{Tr}(I_{A,C} \otimes Y)U E_{\rho\otimes\rho_0,x}(X \otimes I_{B,C})U^*)^* \\
&- \mathrm{Tr}(I_{A,C} \otimes Y)U E_{\rho\otimes\rho_0,x}(X \otimes I_{B,C})U^* + \left(\|I_{A,C} \otimes Y\|^{(e)}_{U\rho\otimes\rho_0 U^*,x}\right)^2 \\
=&\left(\|X\|^{(e)}_{\rho,x}\right)^2 - (\mathrm{Tr}(I_{A,C} \otimes Y)U(E_{\rho,x}(X) \otimes \rho_0)U^*)^* \\
&- \mathrm{Tr}(I_{A,C} \otimes Y)U(E_{\rho,x}(X) \otimes \rho_0)U^* + \left(\|Y\|^{(e)}_{\kappa(\rho),x}\right)^2 \\
=&\left(\|X\|^{(e)}_{\rho,x}\right)^2 - (\mathrm{Tr}\, Y\kappa(E_{\rho,x}(X)))^* - \mathrm{Tr}\, Y\kappa(E_{\rho,x}(X)) + \left(\|Y\|^{(e)}_{\kappa(\rho),x}\right)^2 \\
=&\left(\|X\|^{(e)}_{\rho,x}\right)^2 - \langle \kappa_{\rho,x}(X), Y\rangle^{(e)}_{\kappa(\rho),x} - \langle Y, \kappa_{\rho,x}(X)\rangle^{(e)}_{\kappa(\rho),x} + \left(\|Y\|^{(e)}_{\kappa(\rho),x}\right)^2 \\
=&\left(\|X\|^{(e)}_{\rho,x}\right)^2 + \left(\|Y - \kappa_{\rho,x}(X)\|^{(e)}_{\kappa(\rho),x}\right)^2 - \left(\|\kappa_{\rho,x}(X)\|^{(e)}_{\kappa(\rho),x}\right)^2
\end{aligned}
$$

問題 6.9:　エンタングルメント破壊通信路で W_ω が互いに直交する純粋状態である場合に定理 6.2 を適用する．

問題 6.11:　**a**:　問題 **6.2** の **a** と **d** を組み合わせる．**b**:　問題 **6.10** と **a** を組み合わせる．**c**:　問題 **6.2** で示したように $\kappa_{\boldsymbol{M},\rho_\theta,s}$ が射影であることを利用する．

問題 6.12:　**b**:　公式 $\exp(X(\theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X(\theta)^n}{n!}$ と問題 **6.12** の **a** を用いる．

問題 6.13:　はじめに $\frac{d\rho_\theta^{\otimes n}}{d\theta} = \sqrt{n}\left(\frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right)^{(n)}$ となることを示し，これと (6.5) を用いて示す．

問題 6.15:　$\boldsymbol{J}_{\theta,s;i,j} = \mathrm{Tr}\, L^*_{\theta,i,s} \frac{\partial\rho_\theta}{\partial\theta^j}$ となることを用いる。

問題 6.17: $L_{\theta,b} = \frac{d \log \rho_\theta}{d\theta}$ を用いる。

問題 6.18: 問題 **6.17** の量子状態族 $\{\rho_\theta = e^{-i\theta Y} \rho e^{i\theta Y}\}$ の微分の e 表現と m 表現を比較する。

問題 6.19: **b**: (6.7) 及び (5.11) を用いる。

問題 6.20: TP-CP 写像 $\lambda\rho_\theta^1 \oplus (1-\lambda)\rho_\theta^2 \to \lambda\rho_\theta^1 + (1-\lambda)\rho_\theta^2$ を考える.

問題 6.21: 状態変化 κ_1, κ_2 で写された先の状態族について問題 **6.20** を適用する.

問題 6.23: (6.22) での例は S_1 を変えない適当なユニタリ変換で $x_2 = 0$ とできることと、そのモデルでは $x_1(t_0) = 0$ となる状態が存在するので、$\Pi_{L,s}^{t_0} \rho_0$ を改めて ρ_0 とおく。

問題 6.24: $\int_0^1 \mu_s''(\theta)\theta \, d\theta = [\mu_s'(\theta)\theta - \mu_s(\theta)]_0^1$ となることに注目する。

問題 6.26: **c**: 問題 **6.24** の **c** のヒント参照。

問題 6.27: **a**: 部分積分の公式を２度用いる. **c**: (6.12) を用いる。**d**: **a**,**b**,**c** に加えて $\frac{d^2\rho_\theta}{d\theta^2} = 0$ となることを用いる.

問題 6.28: ②と③との同値性については問題 **6.4** を用いよ.

問題 6.30: $A = \frac{d\rho_\theta}{d\theta}, \rho_{\theta_0} = \rho$ となる状態族を考え、κ が POVM M で与えられるとする。すると、性質 (6.8) と $\|\rho^{-1}\|_{\rho,x}^{(m)} = 1$ から、$J_{\theta_0}^M = \|\kappa(A)\|_{\kappa(\rho),x}^{(m)} \le \|A\|_{\rho,x}^{(m)}$ が成り立つ。これに問題 **6.29** を用いる。

問題 6.31: 問題 **2.28** のヒントを参照。

問題 6.32: **a**: ①であれば、$O(\boldsymbol{M}, \hat{\theta}) - \theta$ と $\frac{1}{J_{\theta,s}} L_{\theta,s}$ の差 K が $K\rho + \rho K = 0$ となることに注意せよ。**b**: 条件 (6.37) を用いる。

問題 6.34: **b**: $B_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\hat{\theta} \le \theta\right\}$, $B_i \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\theta + \frac{\delta(i-1)}{m} \le \hat{\theta} \le \theta + \frac{\delta i}{m}\right\}, (i = 1, \dots, m)$, $B_{m+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\theta + \delta \le \hat{\theta}\right\}$ と定義して, $m+1$ 個の測定値からなる POVM $M_i \stackrel{\text{def}}{=} MB_i$ を考える.

問題 6.37: **a**: $\frac{\langle M(\omega), M(\omega)\rangle_{\rho_\theta,s}^{(e)}}{\langle M(\omega), I\rangle_{\theta,s}^{(e)}} = \mathrm{Tr}\, M(\omega)$ となることを示す. **c**: 問題 **1.1** を用いる. **d**: 問題 **2.30** を用いる。

問題 6.38: $(\boldsymbol{M}, \hat{\theta})$ が局所不偏推定量であれば, 一般に $\boldsymbol{V}_\theta(\boldsymbol{M}, \hat{\theta}) \ge (\boldsymbol{J}_\theta^{\boldsymbol{M}})^{-1}$ となることを示す. 次に各 POVM $\boldsymbol{M}$ に対して, 適当に $\hat{\theta}$ を選べば $(\boldsymbol{M}, \hat{\theta})$ は局所不偏推定量になり, $\boldsymbol{V}_\theta(\boldsymbol{M}, \hat{\theta}) = (\boldsymbol{J}_\theta^{\boldsymbol{M}})^{-1}$ となることを示す.

問題 6.39: ラグランジュの未定乗数法を用いる.

問題 6.40: $\left(\|L(u)\|_{\rho_\theta,s}^{(e)}\right)^2 = \langle u|\boldsymbol{J}_{\theta,s}|u\rangle$ となることを示し, 次に $x \in \mathbb{R}^d$ に対して, $\langle x|\boldsymbol{J}_\theta^{\boldsymbol{M}^u}|x\rangle = \langle L(x)|\kappa_{\boldsymbol{M},\rho_\theta,s}|L(x)\rangle_{\rho_\theta,s}^{(e)} \ge \langle L(x)|\frac{|L(u)\rangle_{\rho_\theta,s}^{(e)}\langle L(u)|}{\langle u|\boldsymbol{J}_{\theta,s}|u\rangle}|L(x)\rangle_{\rho_\theta,s}^{(e)}$ を示す.

問題 6.43: $u_1, \dots, u_d$ が $\boldsymbol{J}_{\theta,s}$ の固有ベクトルで p_i が $\frac{1}{\mathrm{tr}\, \boldsymbol{J}_{\theta,s}^{-\frac{1}{2}}} \boldsymbol{J}_{\theta,s}^{-\frac{1}{2}}$ の固有値であるとき, (6.60) の右辺は $\frac{1}{\mathrm{tr}\, \boldsymbol{J}_{\theta,s}^{-\frac{1}{2}}} \boldsymbol{J}_{\theta,s}^{\frac{1}{2}}$ になる.

問題 6.50: **c**: 問題 **6.48** の **b** を参考のこと。**e**: ベクトルの組 $(u^{i'})$ につ

いて **b** で与えた拡大系上の推定量 $(\boldsymbol{M}, \hat{\theta})$ を考える。元の空間へ射影 P を用いて $\boldsymbol{M} = \{M_k\}$ に対して POVM $\{PM_kP\}$ を考える。**g**: ベクトルの組 (u^i) で $\langle u^i | x_j \rangle = \delta^i_j$ を満たすものは $u^i = ((\mathbf{Re}\, J)^{-1})^{i,j} x_j$ に限られることに注目する。

問題 7.1: ユニタリ行列 $\left(\sum_\omega |u_\omega\rangle\langle u_\omega| \otimes U_{\kappa'_\omega}\right)(I_{B,C} \otimes U)$ 及び $\rho_1 \otimes \rho_0$ に注目する。

問題 7.2: $\mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_B$ を $\mathcal{H}_D$ とし, $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上の置換に対応するユニタリ行列 $W : u \otimes v \mapsto v \otimes u$ を考え, $V \stackrel{\mathrm{def}}{=} (W \otimes I_C)U$ とおく.

問題 7.5: **b:** $\sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B = (\kappa \otimes \iota_{A'})(|x_M\rangle\langle x_M|)$ とすると、(5.2) より、$K(\kappa) = d \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$ となる。よって $K(\kappa)$ の定義より、$\mathrm{Tr}\, \kappa(\rho)\sigma = \mathrm{Tr}\, K(\kappa)\rho \otimes \sigma = d \sum_i p_i [\mathrm{Tr}\, \rho\rho_i^A][\mathrm{Tr}\, \sigma\rho_i^B]$ となる。これより、$\kappa(\rho) = d \sum_i p_i [\mathrm{Tr}\, \rho\rho_i^A]\rho_i^B$ を得る。

問題 7.7: (7.15) の右辺を展開して整理する.

問題 7.8: (7.15) の右辺を展開して整理する.

問題 7.11: $\Delta_1(O(\boldsymbol{M}) - X, \rho) \le \Delta_3(\boldsymbol{M}, X, \rho)$ となることと演習問題 7.9 と $x, y \ge 0$ に対して $\sqrt{x^2 + y^2} \le x + y$ となることを用いる。

問題 7.12: 2×2 の直交行列 $(a_{i,j})$ で $\tilde{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} a_{1,1}X + a_{1,2}Y$, $\tilde{Y} \stackrel{\mathrm{def}}{=} a_{2,1}X + a_{2,2}Y$ としたとき、$\mathrm{Cov}_\rho(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ となるものを選び、$\tilde{X}, \tilde{Y}$ について (7.26) を示す。そして (7.26) の両辺が直交行列による変換 $(X, Y) \mapsto (\tilde{X}, \tilde{Y})$ の下で不変であることを用いる。

問題 7.13: **g**: 変換 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto (\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ の下で (7.27) の両辺は $\det(b_{i,j})$ 倍になることに注意せよ。

問題 7.14: $\Delta_3(\boldsymbol{M}_{X,Y,\rho}, O^1(\boldsymbol{M}_{X,Y,\rho}), \rho) = \frac{1-p}{p}\Delta_1(X, \rho)$, $\Delta_3(\boldsymbol{M}_{X,Y,\rho}, O^2(\boldsymbol{M}_{X,Y,\rho}), \rho) = \frac{1-q}{q}\Delta_1(Y, \rho)$ となることを示し、$\frac{1-p}{p}\frac{1-q}{q} = 1$ となることに注意せよ。

問題 7.17: 問題 **6.21** を参考にする.

問題 8.2: 部分トレースについての d_1 の単調性に注目する.

問題 8.3: $F_e(\rho, \kappa) = \sum_i \langle x|E_i \otimes I|x\rangle\langle x|E_i \otimes I|x\rangle$ であることに注意する。

問題 8.4: **a**: 行列 $\{\mathrm{Tr}\, E_i A_j \rho\}_{i,j}$ の特異値分解を考え、Kraus 表現を取り直す。**b**: **a** を適用し、$p_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tr}\, A_i \rho A_i$, $A'_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} A_i/\sqrt{p_i}$ とすると、$F_e^2(\rho, \kappa \circ \kappa') = \sum_i p_i |\mathrm{Tr}\, E_i A'_i \rho|^2$ が成り立つ。**c**: 積 $EA = (U|E|^{1/2})(|E|^{1/2}A)$ に注目し、内積 $\mathrm{Tr}\, X^* Y \rho$ について、Schwarz の不等式を用いる。**d**: $F_e^2(\rho, \kappa \circ \kappa_U) \ge |\mathrm{Tr}\, E_1 U^* \rho|^2$ が成り立つことに注意せよ。

問題 8.5: A_1, A_2 をエルミート行列としたとき、$|\mathrm{Tr}(A_1 + A_2 i)\rho|^2 = (\mathrm{Tr}\, A_1\rho)^2 + (\mathrm{Tr}\, A_2\rho)^2$ が成り立つことを示せ。

問題 8.9: ②や (8.20) を用いる.

問題 8.10: $I_\rho(A : B) = D(\rho_{A,B} \| \rho_A \otimes \rho_B)$ に注意せよ。

問題 8.11:　(5.22) の 2 つ目の不等式及び参照系について部分トレースを取ることについてのトレースノルムの単調性に注目する。

問題 8.12:　$U(\rho \otimes |u\rangle\langle u|)U$ のエントロピーは ρ のエントロピーに等しいことに注意せよ。

問題 8.15:　κ' の Stinespring 表現を考え、κ' の状態変化後の環境系についての部分トレースに注目する。

問題 8.17:　変化後の $\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_E \otimes \mathcal{H}_B$ 上の状態は純粋状態であるので、$H(\rho)$ は変化後の参照系 $\mathcal{H}_R$ のエントロピーと等しく、$H(\kappa(\rho))$ は変化後の $\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_E$ でのエントロピーに等しく、$H_e(\rho, \kappa)$ は環境系 $\mathcal{H}_E$ のエントロピーに等しい。

問題 8.18:　x' は $\mathcal{H}_{A'} \otimes \mathcal{H}_{E'} \otimes \mathcal{H}_R$ 上の純粋状態のであるので $H_{x'}(A'R) = H_{x'}(E'), H_{x'}(R) = H_{x'}(A'E')$ となる。

問題 8.21:　**b**: (8.48) の最後の不等式では (5.31) を用いる。

問題 8.24:　$|u\rangle\langle u|$ と可換な PVM のピンチングについての (5.31) とエントロピーの凹性を用いる。

問題 8.25:　例えば、Stinespring 表現となるユニタリ行列を $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4$ 上の行列として

$$\begin{pmatrix} S_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p_0} & * & * & * \\ \sqrt{p_1} & * & * & * \\ \sqrt{p_2} & * & * & * \\ \sqrt{p_3} & * & * & * \end{pmatrix}$$

を考える。（ただし、$*$ の部分はユニタリになるように適当に取る。）

問題 8.26:　この写像が 2 重確率遷移行列になることに注意する.

問題 8.28:　定理 8.4 を用いる.

問題 8.29:　$R > E(\rho)$, $L = [e^{nR}]$ のとき，定理 8.8 の (8.64) の右辺が指数的に 0 に近づくことを示す.

問題 8.30:　$\rho = \sum_i p_i |x_i\rangle\langle x_i|$ とし，$E_f(|x_i\rangle\langle x_i|) = D(|x_i\rangle\langle x_i| \| \sigma_i)$ となる separable 状態 σ_i を考え，相対エントロピーの接合凸性を用いる.

問題 8.32:　問題 **8.27** から直ちに得られる。

問題 8.33:　始めに $\{v \otimes u - u \otimes v | u, v \in \mathbb{C}^3\}$ 上の純粋状態のときに題意を示す。

問題 9.2:　逆定理の部分は定理 4.2 の証明を参考にし，Fano の不等式を用いる.

問題 9.3:　(p_i, ρ_i) を入力系の確率分布とすると、Stinespring 表現を用いることで $C(\kappa)$ は $\max_{(p_i,\rho_i)} H(\kappa(\sum_i p_i \rho_i)) - \sum_i p_i H(\mathrm{Tr}_{A,C} U_\kappa(\rho_i \otimes \rho_0) U_\kappa^*)$ と書ける。そして、$\sum_i p_i \rho_i = \rho$ となる入力系の確率分布 (p_i, ρ_i) に限った場合でのこの量の最大値を考える。このときの最大値を実現する入力系の確率分布を (p_i, ρ_i) とする。なお、ρ_i は純粋状態となるように選ぶ。すると

$C(\kappa) = H(\kappa(\sum_i p_i\rho_i)) - \sum_i p_i H(\mathrm{Tr}_{A,C} U_\kappa(\rho_i \otimes \rho_0)U_\kappa^*)$ となる。ここで (p_i,ρ_i) が最大値を実現することから、入力系の分布 (p_i',ρ_i') で $\sum_i p_i\rho_i = \sum_i p_i'\rho_i', \sum_i p_i H(\mathrm{Tr}_{A,C} U_\kappa(\rho_i \otimes \rho_0)U_\kappa^*) > \sum_i p_i' H(\mathrm{Tr}_{A,C} U_\kappa(\rho_i' \otimes \rho_0)U_\kappa^*)$ となるものは存在しない。したがって、この最大値は $H(\kappa(\rho)) - E_f(U_\kappa(\rho\otimes\rho_0)U_\kappa^*)$ と一致するので (9.5) を得る。

問題 9.4: 量子相対エントロピーの単調性と (5.35) を用いると,

$$\begin{aligned}
&I(X:Y)\\
\le&\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n} D\left(\left(\varphi_e^{(n)}(i)\otimes\iota_B^{\otimes n}\right)(\rho_{A,B}^{\otimes n})\middle\|\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}\left(\varphi_e^{(n)}(i)\otimes\iota_B^{\otimes n}\right)(\rho_{A,B}^{\otimes n})\right)\\
=&H\left(\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}\left(\varphi_e^{(n)}(i)\otimes\iota_B^{\otimes n}\right)(\rho_{A,B}^{\otimes n})\right)-\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}H\left(\left(\varphi_e^{(n)}(i)\otimes\iota_B^{\otimes n}\right)(\rho_{A,B}^{\otimes n})\right)\\
\le&H\left(\mathrm{Tr}_{A_n'}\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}\left(\varphi_e^{(n)}(i)\otimes\iota_B^{\otimes n}\right)(\rho_{A,B}^{\otimes n})\right)\\
&\quad+H\left(\mathrm{Tr}_B\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}\left(\varphi_e^{(n)}(i)\otimes\iota_B^{\otimes n}\right)(\rho_{A,B}^{\otimes n})\right)-\min_\kappa H((\kappa\otimes\iota_B^{\otimes n})(\rho_{A,B}^{\otimes n}))
\end{aligned}$$

を得る。そして、

$$\mathrm{Tr}_{A_n'}\left(\varphi_e^{(n)}(i)\otimes\iota_B^{\otimes n}\right)(\rho_{A,B}^{\otimes n}) = \mathrm{Tr}_A\,\rho_{A,B}^{\otimes n}$$

$$H\left(\mathrm{Tr}_B\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}\left(\varphi_e^{(n)}(i)\otimes\iota_B^{\otimes n}\right)(\rho_{A,B}^{\otimes n})\right)\le\log\dim\mathcal{H}_{A_n'}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
I(X:Y)\le&H\left(\mathrm{Tr}_A\,\rho_{A,B}^{\otimes n}\right)+\log\dim\mathcal{H}_{A_n'}-\min_\kappa H((\kappa\otimes\iota_B^{\otimes n})(\rho_{A,B}^{\otimes n}))\\
=&nH\left(\mathrm{Tr}_A\,\rho_{A,B}\right)+\log\dim\mathcal{H}_{A_n'}-\min_\kappa H((\kappa\otimes\iota_B^{\otimes n})(\rho_{A,B}^{\otimes n}))
\end{aligned}$$

を得る。

問題 9.5: (4.3) 及び (8.44) を用いると以下のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
&\sum_j p_j D((\kappa\circ\varphi_e(j)\otimes\iota_R)(\rho_{A',R})\|\sum_j p_j(\kappa\circ\varphi_e(j)\otimes\iota_R)(\rho_{A',R}))\\
\le&\sum_j p_j D((\kappa\circ\varphi_e(j)\otimes\iota_R)(\rho_{A',R})\|(\sum_j p_j(\kappa\circ\varphi_e(j))\rho_{A'})\otimes\rho_R)\\
=&H(\sum_j p_j(\kappa\circ\varphi_e(j))\rho_{A'})+H(\rho_R)-\sum_j p_j H((\kappa\circ\varphi_e(j)\otimes\iota_R)\rho_{A',R})\\
=&H(\kappa(\sum_j p_j\varphi_e(j)(\rho_{A'}))+\sum_j p_j\tilde{I}_c(\rho_{A'},\kappa\circ\varphi_e(j))\\
\le&H(\kappa(\sum_j p_j\varphi_e(j)(\rho_{A'})))+\tilde{I}_c(\sum_j p_j\varphi_e(j)(\rho_{A'}),\kappa)\\
=&I(\sum_j p_j\varphi_e(j)(\rho_{A'}),\kappa).
\end{aligned}
$$

ここで、$\rho_{A',R}$ は純粋状態であるので $H(\rho_{A'})=H(\rho_R)$ となることに注意せよ。

問題 9.7: はじめに、2 値の POVM $\{\{\kappa_{W_p}(W_x)-CW_p\ge 0\},\{\kappa_{W_p}(W_x)-CW_p<0\}\}$ に問題 **3.9** を適用することで $0\ge s$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\left(\operatorname{Tr}W_x\{\kappa_{W_p}(W_x)-CW_p\ge 0\}\right)^{1-s}\left(\operatorname{Tr}W_p\{\kappa_{W_p}(W_x)-CW_p\ge 0\}\right)^{s}\\
&+\left(\operatorname{Tr}W_x\{\kappa_{W_p}(W_x)-CW_p<0\}\right)^{1-s}\left(\operatorname{Tr}W_p\{\kappa_{W_p}(W_x)-CW_p<0\}\right)^{s}\\
\le&\operatorname{Tr}W_x^{1-s}W_p^s
\end{aligned}
$$

を得る。さらに $\operatorname{Tr}W_x\{\kappa_{W_p}(W_x)-CW_p\ge 0\}=\operatorname{Tr}\kappa_{W_p}(W_x)\{\kappa_{W_p}(W_x)-CW_p\ge 0\}\ge C\operatorname{Tr}W_p\{\kappa_{W_p}(W_x)-CW_p\ge 0\}$ であるから、

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}W_x\{\kappa_{W_p}(W_x)-CW_p\ge 0\}\\
\le&C^s\left(\operatorname{Tr}W_x\{\kappa_{W_p}(W_x)-CW_p\ge 0\}\right)^{1-s}\left(\operatorname{Tr}W_p\{\kappa_{W_p}(W_x)-CW_p\ge 0\}\right)^{s}
\end{aligned}
$$

となり、(9.16) を得る。

問題 9.8: $\frac{-\phi(s)+s(R-r)}{2}=\frac{r}{2}$ を r について解く.

問題 9.9: (9.19) の 2 つの式のうち、1 つ目の式の左辺の平方根は外すことができ、2 つの目式の左辺は 0 になる。

問題 9.11: 以下の等式を用いる。

$$
\begin{aligned}
&I(P,W_B\otimes W'_B)-I(p,W_B)-I(p,W'_B)\\
=&D\left(\sum_{x,x'}q(x,x')W_{B,x}\otimes W'_{B,x'}\middle\|\left(\sum_x p(x)W_{B,x}\right)\otimes\left(\sum_{x'}p'(x')W'_{B,x'}\right)\right).
\end{aligned}
$$

問題 9.15: はじめに

$$\varepsilon_{E,a}[\Phi] = \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{M(M-1)} d_1((W_E Q)_i, (W_E Q)_j)$$
$$\geq \frac{1}{M} \sum_i d_1((W_E Q)_i, \frac{1}{M} \sum_{j=1} (W_E Q)_j)$$

となることに注意する。すると、Fannes の不等式 (5.38) と η_0 の凹性及び単調増加性 (問題 **5.22**) より、

$$I_E(\Phi) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} H(\frac{1}{M} \sum_{j=1} (W_E Q)_j)) - H(W_E Q)_i)$$
$$\leq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} |H(\frac{1}{M} \sum_{j=1} (W_E Q)_j)) - H(W_E Q)_i)|$$
$$\leq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} d_1 \left((W_E Q)_i, \frac{1}{M} \sum_{j=1} (W_E Q)_j \right) \log d$$
$$+ \eta_0 \left(d_1 \left((W_E Q)_i, \frac{1}{M} \sum_{j=1} (W_E Q)_j \right) \right)$$
$$\leq \varepsilon_{E,a}[\Phi] \log d + \eta_0(\varepsilon_{E,a}[\Phi])$$

となる。これらに注意して証明する。

問題 9.16: はじめに $\sum_i \frac{1}{M} d_1((W_E Q)_i, \frac{1}{M} \sum_{j=1} (W_E Q)_j))$ が 0 に収束する条件での符号の存在を示す。次に

$$\sup_i \sup_j d_1((W_E Q)_i, (W_E Q)_j) \leq 2 \sup_i d_1((W_E Q)_i, \frac{1}{M} \sum_{j=1} (W_E Q)_j))$$

に注意し、$d_1((W_E Q)_i, \frac{1}{M} \sum_{j=1} (W_E Q)_j))$ の値が小さい方から $M/2$ 番目までを選ぶ。

問題 9.17: 例えば $a = 1/2$ とおいて考える。

問題 A.3: (A.11) については (A.8) に注目し、左辺と右辺での最大化の際に動かすユニタリ行列の範囲を考える。)

問題 A.5: A が逆行列を持つときは問題 **1.4** から示せる。逆行列を持たない場合は持つ場合の極限を考える。

問題 A.6: **a**: $B^{-1/2} A B^{-1/2} = (A^{1/2} B^{-1/2})^* (A^{1/2} B^{-1/2})$ となることと、(1.21) を用いる。**d**: $B + \epsilon I$ を考え $\epsilon \to 0$ の極限を取る。

問題 A.10: 固有値 $a_k, \ldots, a_d$ の固有ベクトルから生成される $d-k+1$ 次元部分空間 $\mathcal{K}'$ を考え、$\mathcal{K} \cap \mathcal{K}'$ の要素 y に注目する。

問題 A.11: 問題 **A.10** を適用する。

問題 A.12: 問題 **A.11** を適用する。