第３章の問題，解答例

3.1 (i) については省略する．
(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して m を十分大きくとると，

$$(1-\varepsilon)\sqrt{2\pi}m^{m+1/2}e^{-m} \leqq m! \leqq (1+\varepsilon)\sqrt{2\pi}m^{m+1/2}e^{-m}. \tag{1}$$

このような m についてのみ考える．
(イ) $n = 3m$ のとき．

$$c_n = \frac{1}{(m!)^3} \leqq \frac{(1-\varepsilon)^{-3}}{(\sqrt{2\pi}m^{m+1/2}e^{-m})^3} = \frac{(1-\varepsilon)^{-3}}{\sqrt{2\pi}^3}\frac{3^{3m+3/2}e^{3m}}{(3m)^{3m+3/2}} = \frac{3^{3/2}(1-\varepsilon)^{-3}}{\sqrt{2\pi}^3}\frac{3^{3m}e^{3m}}{(3m)^{3m+3/2}}.$$

(ロ) $n = 3m+1$ のとき，

$$\begin{aligned}
c_n = \frac{1}{(m!)^2(m+1)!} &\leqq \frac{(1-\varepsilon)^{-3}}{\sqrt{2\pi}^3}\frac{1}{m+1}\frac{3^{3m+3/2}e^{3m}}{(3m)^{3m+3/2}} \\
&= \frac{(1-\varepsilon)^{-3}}{\sqrt{2\pi}^3}\frac{3^{3m+1}3^{1/2}e^{3m+1}}{(3m+1)^{3m+1+3/2}}e^{-1}\frac{(3m+1)^{3m+3/2}}{(3m)^{3m+3/2}}\frac{3m+1}{m+1} \\
&= \frac{(1-\varepsilon)^{-3}3^{1/2}}{\sqrt{2\pi}^3 e}\left(1+\frac{1}{3m}\right)^{3m+3/2}\frac{3m+1}{m+1}\frac{3^{3m+1}e^{3m+1}}{(3m+1)^{3m+1+3/2}}.
\end{aligned}$$

ここで，

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{3m}\right)^{3m+3/2} = e, \qquad \lim_{m\to\infty}\frac{3m+1}{m+1} = 3,$$

に注意すれば結論を得る．
(ハ) $n = 3m+2$ のとき，

$$\begin{aligned}
c_n = \frac{1}{m!((m+1)!)^2} &\leqq \frac{(1-\varepsilon)^{-3}}{\sqrt{2\pi}^3}\frac{1}{(m+1)^2}\frac{3^{3m+3/2}e^{3m}}{(3m)^{3m+3/2}} \\
&= \frac{(1-\varepsilon)^{-3}}{\sqrt{2\pi}^3}\frac{3^{3m+2}e^{3m+2}}{(3m+2)^{3m+2+3/2}}3^{-1/2}e^{-2}\left(\frac{3m+2}{3m}\right)^{3m+3/2}\left(\frac{3m+2}{m+1}\right)^2 \\
&= \frac{(1-\varepsilon)^{-3}}{\sqrt{2\pi}^3 3^{1/2}e^2}\left(1+\frac{2}{3m}\right)^{3m+3/2}\left(\frac{3m+2}{m+1}\right)^2\frac{3^{3m+2}e^{3m+2}}{(3m+2)^{3m+2+3/2}}.
\end{aligned}$$

ここで，

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{2}{3m}\right)^{3m+3/2} = e^2$$

に注意すれば結論を得る．

次に，本文中の注意を用いると，

$$\begin{aligned}
p_{2n} &= \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\sum_{0\leqq i+j\leqq n}\left(\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\right)^2 \\
&\leqq c_n\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\sum_{0\leqq i+j\leqq n}\frac{n}{i!j!(n-i-j)!} = c_n\frac{(2n)!3^n}{n!6^{2n}}.
\end{aligned}$$

Stirling の公式と (3.4) を用いると，m を n にして (1) が成り立つような十分大きな n に対して

$$p_{2n} \leqq C3^n n^{-n-3/2}e^n(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1}\frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+3/2}e^{-2n}3^n}{\sqrt{2\pi}n^{n+3/2}e^{-n}6^{2n}} = 2^{3/2}C(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1}n^{-3/2}.$$

3.2 (i) $a_{m+1}(\lambda) = \dfrac{1}{2}e^{-\lambda}(a_m(\lambda)+a_{m+2}(\lambda))$.
(ii) 二次方程式 $t^2 - 2e^\lambda t + 1$ の根は $e^\lambda \pm \sqrt{e^{2\lambda}-1}$. 従って，定数 α, β が存在して，

$$a_m(\lambda) = \alpha(e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda}-1})^m + \beta(e^\lambda - \sqrt{e^{2\lambda}-1})^m = \alpha(e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda}-1})^m + \frac{\beta}{(e^\lambda+\sqrt{e^{2\lambda}-1})^m}.$$

$\lim_{\lambda\to\infty} a_1(\lambda) = 0$ より $\alpha = 0$ が分かる．また，$a_0(\lambda) = 1$ より $\beta = 1$ である．よって，

$$a_m(\lambda) = (e^\lambda - \sqrt{e^{2\lambda} - 1})^m.$$

3.3　(i) $T_1 > 0$ より $\phi_1(0) = 0$. 次に，

$$\phi_m(z) = E[z^{T_m}] = E[z^{T_m - T_1} z^{T_1}].$$

ランダムウォークの強 Markov 性から，$T_m - T_1$ と T_1 は独立である．さらに，単純ランダムウォークの空間的一様性から，$T_m - T_1$ は T_{m-1} と同じ確率分布に従う．従って，

$$\phi_m(z) = E[z^{T_{m-1}}]E[z^{T_1}] = \phi_{m-1}(z)\phi_1(z).$$

これから $\phi_m(z) = (\phi_1(z))^m$ を得る．

　次に，$S_1 = 1, -1$ で場合分けをすると，

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2}E[z^{T_1}|S_1 = 1] + \frac{1}{2}E[z^{T_1}|S_1 = -1] = \frac{z}{2} + \frac{z}{2}E[z^{T_2}] = \frac{z}{2} + \frac{z}{2}(\phi_1(z))^2.$$

(ii) t についての 2 次方程式 $2t = zt^2 + z$ の根は，$t = (1 \pm \sqrt{1 - z^2})/z$. $\phi_1(0)$ より

$$\phi_1(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - z^2}}{z} = \frac{z}{1 + \sqrt{1 - z^2}}$$

を得る．

　一般化された二項級数を使うと，

$$\phi_1(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{1/2}{m}(-z^2)^m = \sum_{m=1}^{\infty}\binom{1/2}{m}(-1)^{m+1}z^{2m-1}$$

と展開できる．一方，単純ランダムウォークの対称性から，

$$\begin{aligned}\phi_1(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} z^{2m-1}P(T_1 = 2m - 1) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{2m-1}P(S_1 \leqq 0, ..., S_{2m-2} \leqq 0, S_{2m-1} = 1) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} z^{2m-1}P(S_1 \geqq 0, ..., S_{2m-2} \geqq 0, S_{2m-1} < 0)\end{aligned}$$

が分かる．z^{2m-1} の係数を比べて結論を得る．

3.4　条件をみたすには $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ を通らないといけない．鏡像の原理から，$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ から出て，直線 $x = y$ に触れて $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ に至る経路の数は，$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ から出て $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ に至る経路の数と等しいので，$\binom{a+b-2}{a}$ である．

　従って，$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ から出て $x = y$ に触れることなく $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ に至る経路の数は $\binom{a+b-2}{a-2} - \binom{a+b-2}{a}$ となる．よって求める確率は，この経路の数を $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ から出て $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ に至る経路の数 $\binom{a+b}{a}$ で割って，

$$\frac{a!b!}{(a+b)!}\left(\frac{(a+b-2)!}{(a-2)!b!} - \frac{(a+b-2)!}{a!(b-2)!}\right) = \frac{a(a-1) - b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{a-b}{a+b}.$$

3.5　$\mathbf{R}^d$ の内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と書くと，$i \neq j$ なら $E[\langle X_i, X_j\rangle] = 0$. よって

$$E[|S_n|^2] = E[\sum_{i=1}^{n}|X_i|^2 + 2\sum_{i<j}\langle X_i, X_j\rangle] = n.$$

3.6　(i) 数学的帰納法で示す．$n = 1$ のときは明らか．n のとき主張が正しいとすると，

$$P(S_{n+1} < t) = \int_0^t P(X_{n+1} < t - s|S_n = s)\ P(S_n \in ds) = \int_0^t (t - s)\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\ ds = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(ii) 大数の法則から，確率 1 で $S_n \to \infty$ であるから確率 1 で T は有限であることに注意しておく．結論は次のように得られる．

$$P(T \geqq n) = P(S_{n-1} < 1) = \frac{1}{(n-1)!}, \qquad n = 1, 2, ...,$$

$$E[T] = \sum_{n=1}^{\infty}P(T \geqq n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = e.$$

(iii) $E[S_T] = E[X_1]E[T] = e/2$.