第５章の問題，解答例

5.1　(i) $s \geqq t$ のとき，$\{\tau \wedge t \leqq s\} = \Omega$.
$s < t$ のとき，$\{\tau \wedge t \leqq s\} = \{\tau \leqq s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.
(ii) $t > 0$ に対して

$$(A \cap \{\sigma \leqq \tau\}) \cap \{\tau \leqq t\} = (A \cap \{\sigma \leqq t\}) \cap \{\tau \leqq t\} \cap \{\sigma \wedge t \leqq \tau \wedge t\}$$

と書き直せば，右辺の３つの集合は $\mathcal{F}_t$ に属する．
(iii) $A \in \mathcal{F}_\sigma$ とすると，任意の $t > 0$ に対して $A \cap \{\tau \leqq t\} = A \cap \{\sigma \leqq t\} \cap \{\tau \leqq t\}$. $A \cap \{\sigma \leqq t\} \in \mathcal{F}_t$ より $A \cap \{\tau \leqq t\} \in \mathcal{F}_t$, つまり $A \in \mathcal{F}_\tau$.

5.2　(i) 前問より $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} \subseteqq \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ が分かる．逆に，$A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ とすると，

$$A \cap \{\sigma \wedge \tau \leqq t\} = A \cap (\{\sigma \leqq t\} \cup \{\tau \leqq t\}) = (A \cap \{\sigma \leqq t\}) \cup (A \cap \{\tau \leqq t\}).$$

$A \cap \{\sigma \leqq t\} \in \mathcal{F}_t, A \cap \{\tau \leqq t\} \in \mathcal{F}_t$ より，$A \cap \{\sigma \wedge \tau \leqq t\} \in \mathcal{F}_t$. 従って，$A \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$ を得る．
(ii) 前問 (ii) より $\{\sigma \leqq \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$ であり，$\{\sigma > \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$. また，$\sigma \wedge \tau$ は $\mathcal{F}_\tau$-可測だから，$\{\sigma < \tau\} = \{\sigma \wedge \tau < \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$. よって，$\{\sigma \geqq \tau\}, \{\sigma = \tau\}$ も $\mathcal{F}_\tau$ に属することが分かる．
　σ, τ をとりかえると，５つの集合が $\mathcal{F}_\sigma$ に属することが分かり，$\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$ に属することが分かる．

5.3　次の等式に注意すればよい．

$$\{\sup_n \tau_n \leqq t\} = \bigcap_n \{\tau_n \leqq t\}, \qquad \{\limsup_{n\to\infty} \tau_n \leqq t\} = \bigcup_{\ell=1}^\infty \bigcap_{m \geqq \ell} \{\tau_m \leqq t\},$$

$$\{\inf_n \tau_n \leqq t\} = \bigcup_n \{\tau_n \leqq t\}, \qquad \{\liminf_{n\to\infty} \tau_n \leqq t\} = \bigcap_{\ell=1}^\infty \bigcup_{m \geqq \ell} \{\tau_m \leqq t\}.$$

5.4　$\{M(t), t \geqq 0\}$ を非負局所マルチンゲールとすると，$\tau_n \to \infty$ をみたす停止時刻の列 $\{\tau_n\}$ が存在して，

$$E[M(t \wedge \tau_n)|\mathcal{F}_s] = M(s \wedge \tau_n), \quad a.s., \quad s > t.$$

$n \to \infty$ とすると，Fubini の定理より

$$\liminf_{n\to\infty} E[M(t \wedge \tau_n)|\mathcal{F}_s] \geqq E[M(t)|\mathcal{F}_s].$$

一方，

$$\liminf_{n\to\infty} E[M(t \wedge \tau_n)|\mathcal{F}_s] = \lim_{n\to\infty} M(s \wedge \tau_n) = M(s).$$

従って，$E[M(t)|\mathcal{F}_s] \leqq M(s)$, $a.s.$, $s < t$, となり，$\{M(t)\}$ が優マルチンゲールであることが分かる．

5.5　仮定から，$t > s$ のとき，$E[X(t)|\mathcal{F}_s] \geqq X(s)$, $a.s.$ であり，両辺の平均をとると $E[X(t)] \geqq E[X(s)]$. これが等式になるならば，$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)$, $a.s.$ が成り立つ．

5.6　$\tau = \inf\{t \geqq 0; M(t) = a\}$ とおくと，$\{M(t \wedge \tau)\}$ はマルチンゲールである．従って，任意の $A \in \mathcal{F}_0$ に対して

$$E[M(t \wedge \tau)\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{M(0)<a\}}] = E[M(0)\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{X(0)<a\}}].$$

左辺を

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= E[M(t \wedge \tau)\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{M(0)<a\}} \mathbf{1}_{\{\tau \leqq t\}}] + E[M(t \wedge \tau)\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{M(0)<a\}} \mathbf{1}_{\{\tau > t\}}] \\ &= aP(A \cap \{M(0) < a, \tau \leqq t\}) + E[M(t \wedge \tau)\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{M(0)<a\}} \mathbf{1}_{\{\tau \leqq t\}}] \end{aligned}$$

と変形して，$t \to \infty$ の極限を考える．第２項については，$|M(t \wedge \tau)\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{M(0)<a\}} \mathbf{1}_{\{\tau \leqq t\}}| \leqq a$ であり，仮定から $t \to \infty$ のとき $|M(t \wedge \tau)\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{M(0)<a\}} \mathbf{1}_{\{\tau \leqq t\}}| \leqq M(t) \to 0$ だから，Lebesgue の収束定理が適用できて第２項が 0 に収束することが分かる．従って，

$$E[M(0)\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{M(0)<a\}}] = aP(A \cap \{M(0) < a, \tau < \infty\}) \tag{*}$$

となり，

$$P(\sup_{t \geqq 0} M(t) \geqq a|\mathcal{F}_0) = P(\tau < \infty|\mathcal{F}_0) = 1 \wedge (a^{-1}M(0))$$

を得る．
(ii) (*) を $A = \Omega$ として用いると，

$$P(\sup_{t \geqq 0} M(t) \geqq a) = E[\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \mathbf{1}_{\{M(0) \geqq a\}}] + E[\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \mathbf{1}_{\{M(0)<a\}}] = P(M(0) \geqq a) + \frac{1}{a}E[M(0)\mathbf{1}_{\{M(0)<a\}}].$$