第６章の問題，解答例

6.1　$s < t$ とすると，ブラウン運動の独立増分性から確率 1 で

$$E[e^{\lambda B(t)-\lambda^2 t/2}|\mathcal{F}_s] = E[e^{\lambda(B(t)-B(s))}|\mathcal{F}_s]e^{\lambda B(s)-\lambda^2 t/2}$$
$$= E[e^{\lambda(B(t)-B(s))}]e^{\lambda B(s)-\lambda^2 t/2} = e^{\lambda^2(t-s)/2}e^{\lambda B(s)-\lambda^2 t/2} = e^{\lambda B(s)-\lambda^2 s/2},$$
$$E[e^{\sqrt{-1}\lambda B(t)+\lambda^2 t/2}|\mathcal{F}_s] = E[e^{\sqrt{-1}\lambda(B(t)-B(s))}|\mathcal{F}_s]e^{\sqrt{-1}\lambda B(s)+\lambda^2 t/2}$$
$$= E[e^{\sqrt{-1}\lambda(B(t)-B(s))}]e^{\lambda B(s)+\lambda^2 t/2} = e^{-\lambda^2(t-s)/2}e^{\sqrt{-1}\lambda B(s)+\lambda^2 t/2} = e^{\sqrt{-1}\lambda B(s)+\lambda^2 s/2}.$$

6.2　$E[(tB(1/t))^2] = t^2 E[B(1/t)^2] = t$ より分かる．

6.3　n を自然数，$f_1, f_2, ..., f_n$ を $\mathbf{R}^d$ 上の非負可測関数とし，0 を出発点とする Wiener 測度に関する平均を E で表す．$0 < t_1 < \cdots < t_n$ とし，$p(t,x,x') = (2\pi t)^{-d/2}\exp(-|x'-x|^2/2t)$ とおく．

(i) $c > 0$ に対して，

$$E[f_1(c^{-1/2}w(ct_1))f_2(c^{-1/2}w(ct_2))\cdots f_n(c^{-1/2}w(ct_n))]$$
$$= \int_{\mathbf{R}^d} f_1(c^{-1/2}x_1)p(ct_1,0,x_1)\,dx_1 \int_{\mathbf{R}^d} f_2(c^{-1/2}x_2)p(c(t_2-t_1),x_1,x_2)\,dx_2$$
$$\times\cdots\times \int_{\mathbf{R}^d} f_n(c^{-1/2}x_n)p(c(t_n-tn_1,x_{n-1},x_n)\,dx_n.$$

$y_i = c^{-1/2}x_i$ とすると，$p(c(t_i-t_{i-1}),x_{i-1},x_i)dx_i = p(t_i-t_{i-1},y_{i-1},y_i)dy_i$. 従って，

$$E[f_1(c^{-1/2}w(ct_1))f_2(c^{-1/2}w(ct_2))\cdots f_n(c^{-1/2}w(ct_n))]$$
$$= \int_{\mathbf{R}^d} f_1(y_1)p(t_1,0,y_1)\,dy_1 \int_{\mathbf{R}^d} f_2(y_2)p(t_2-t_1,y_1,y_2)\,dy_2 \cdots \int_{\mathbf{R}^d} f_n(y_n)p(t_n-t_{n-1},y_{n-1},y_n)\,dy_n.$$

これは，

$$P(c^{-1/2}w(ct_1)\in dy_1, c^{-1/2}w(ct_2)\in dy_2, ..., c^{-1/2}w(ct_n)\in dy_n)$$
$$= P(w(t_1)\in dy_1, w(t_2)\in dy_2, ..., w(t_n)\in dy_n)$$

を示し，結論を得る．

(ii) K を d 次直交行列とする．

$$E[f_1(Kw(t_1))f_2(Kw(t_2))\cdots f_n(Kw(t_n))]$$
$$= \int_{\mathbf{R}^d} f_1(Kx_1)p(t_1,0,x_1)\,dx_1 \int_{\mathbf{R}^d} f_2(Kx_2)p(t_2-t_1,x_1,x_2)\,dx_2$$
$$\times\cdots\times \int_{\mathbf{R}^d} f_n(Kx_n)p(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n)\,dx_n.$$

$z_i = Kx_i$ とすると，$p(t_i-t_{i-1},x_{i-1},x_i)dx_i = p(t_i-t_{i-1},z_{i-1},z_i)dz_i$. 従って，

$$E[f_1(Kw(t_1))f_2(Kw(t_2))\cdots f_n(Kw(t_n))]$$
$$= \int_{\mathbf{R}^d} f_1(z_1)p(t_1,0,z_1)\,dz_1 \int_{\mathbf{R}^d} f_2(z_2)p(t_2-t_1,z_1,z_2)\,dz_2 \cdots \int_{\mathbf{R}^d} f_n(z_n)p(t_n-t_{n-1},z_{n-1},z_n)\,dz_n.$$

これは，

$$P(Kw(t_1)\in dz_1, Kw(t_2)\in dz_2, ..., Kw(t_n)\in dz_n) = P(w(t_1)\in dz_1, w(t_2)\in dz_2, ..., w(t_n)\in dz_n)$$

を意味し，結論を得る．

(iii) $1/t_1 > 1/t_2.\cdots > 1/t_n$ に注意すると，

$$E[f_1(t_1w(1/t_1))f_2(t_2w(1/t_2))\cdots f_n(t_nw(1/t_n))]$$
$$= \int_{\mathbf{R}^d} f_n(t_nx_n)p(1/t_n,0,x_n)\,dx_n \int_{\mathbf{R}^d} f_{n-1}(t_{n-1}x_{n-1})p(1/t_{n-1}-1/t_n,x_n,x_{n-1})dx_{n-1}$$
$$\times\cdots\times \int_{\mathbf{R}^d} f_2(t_2x_2)p(1/t_3-1/t_2,x_3,x_2)\,dx_2 \int_{\mathbf{R}^d} f_1(t_1x_1)p(1/t_2-1/t_1,x_2,x_1)\,dx_1.$$

ここで，$t_i x_i = u_i$ とおくと $t_i^d dx_i = du_i$ であり，少々長い計算になるので省略するが，

$$\begin{aligned}&p(1/t_n, 0, x_n)p(1/t_{n-1} - 1/t_n, x_n, x_{n-1}) \cdots p(1/t_2 - 1/t_1, x_2, x_1)\, dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n \\ &= p(t_1, 0, u_1)p(t_2 - t_1, u_1, u_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, u_{n-1}, u_n)\, du_1\, du_2\, \cdots\, du_n\end{aligned}$$

を示すことができる．($n = 2$ のときを計算してみてください．) これから，

$$E[f_1(t_1 w(1/t_1))f_2(t_2 w(1/t_2)) \cdots f_n(t_n w(1/t_n))] = E[f_1(w(t_1))f_2(w(t_2)) \cdots f_n(w(t_n))]$$

が得られて，結論を得る．
注意． (iii) については，$d = 1$ のときを示せばよい．別の証明方法として，$(t_1 w(1/t_1), ..., t_n w(1/t_n))$ が平均 0 の n 次元正規分布に従うことを示し，共分散が $E[tw(1/t) \cdot sw(1/s)] = \min(s, t)$ で与えられることを示すという方法があり，こちらの方が易しい．

6.4 (i) 本文中にも数回現れたが，確率論によく現れる次の変形を行う：

$$E\left[\left\{\sum_{k=1}^{2^n}(B(k2^{-n}t) - B((k-1)2^{-n}t))^2 - t\right\}^2\right] = E\left[\left\{\sum_{k=1}^{2^n}\{(B(k2^{-n}t) - B((k-1)2^{-n}t))^2 - 2^{-n}t\}\right\}^2\right]$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{2^n} E[\{(B(k2^{-n}t) - B((k-1)2^{-n}t))^2 - 2^{-n}t\}^2] \\ &\quad + 2\sum_{k<j}^{2^n} E[\{(B(k2^{-n}t) - B((k-1)2^{-n}t))^2 - 2^{-n}t\}\{(B(j2^{-n}t) - B((j-1)2^{-n}t))^2 - 2^{-n}t\}].\end{aligned}$$

$E[(B(t) - B(s))^4] = 3(t - s)^2, E[(B(t) - B(s)) - 2] = t - s,$ を用いると，第２項はブラウン運動の独立増分性から 0 であり，$E[(V_n - t)^2] = 2 \cdot 2^{-n}$ を得る．
(ii) Chebyshev の不等式より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$P(|V_n - t| \geqq \varepsilon) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2}E[|V_n - t|^2] = \frac{2}{\varepsilon^2}2^{-n}$$

が成り立ち，$\sum_n P(|V_n - t| \geqq \varepsilon) < \infty$ である．従って，Borel-Cantelli の補題より

$$P(|V_n - t| < \varepsilon, \forall n \geqq n_1,\ \text{となる}\ n_1\ \text{が存在}) = 1.$$

これは，V_n が t に概収束することを示す．

6.5 (i) $x > 0$ から出発して t までに少なくとも一度 0 に到達し，時刻 t で $y > 0$ に至る経路と，x から出発して時刻 t に $-y$ に至る経路は１対１に対応するから，Brown 運動の強 Markov 性から結論を得る．
(ii) (i) と同様に反射原理から証明できるが，ここでは計算により示す．f を $[0, \infty)$ 上の非負可測関数とすると，

$$E_x^1[f(w(t))] = \int_{\mathbf{R}} f(|y|)p(t, x, y)\, dy = \int_0^\infty f(y)(p(t, x, y) + p(t, x, -y))\, dy$$

となり，結論を得る．

6.6 (i) T_a の Lebesgue 測度を $|T_a|$ と書くと，$|T_a| = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{B(t)=a\}}dt$ が成り立つ．Fubini の定理より，

$$E[T_a] = E[\int_0^\infty \mathbf{1}\{a\}(B(t))\, dt] = \int_0^\infty E[\mathbf{1}_{\{a\}}(B(t))]\, dt = 0.$$

従って，$P(|T_a| = 0) = 1$.
(ii) $s < u$ に対して $M(s, u) = \max_{s \leqq v \leqq u} B(v)$ とおく．$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq t_3 < t_4 \leqq t$ とすると，

$$M(t_3, t_4) - M(t_1, t_2) = \max_{t_3 \leqq v \leqq t_4}(B(v) - B(t_3)) + (B(t_3) - B(t_2)) - \max_{t_1 \leqq v \leqq t_2}(B(v) - B(t_2)).$$

Brown 運動の独立増分性から右辺の 3 つの確率変数は独立で，それぞれの確率分布は連続分布である．ただし，第１，３項の分布については，Lévy の定理 (定理 6.1) や問題 6.8 を参照のこと．よって，

$$P(M(t_1, t_2) = M(t_3, t_4)) = 0 \qquad \text{または} \qquad P(M(t_1, t_2) \neq M(t_3, t_4)) = 1.$$

有理数の集合の可算性から

$$P(\text{すべての}\ t_1 < t_2 \leqq t_3 < t_4 \leqq t\ \text{なる}\ t_i \in \mathbf{Q}\ \text{に対して}\ M(t_1, t_2) \neq M(t_3, t_4)) = 1$$

が成り立ち，$M(t_i, t_{i+1})$ の t_i, t_{i+1} についての連続性から結論を得る．

6.7 B_x の生成するフィルトレーションを $\{\mathcal{F}_t\}$ とする．$s<t$ のとき，確率 1 で

$$E[|B_x(t)|^2 - d\cdot t|\mathcal{F}_s] = E[|B_x(t)|^2 - |B_x(s)|^2|\mathcal{F}_s] + |B_x(s)|^2 - d\cdot t.$$

ここで，ブラウン運動の Markov 性から $E[B_x(t)|^2 - |B_x(s)|^2|\mathcal{F}_s] = E[|B_a(t-s)|^2 - |a|^2]|_{a=B_x(s)}$ であり，

$$E[|B_a(t-s)|^2 - |a|^2] = \int_{\mathbf{R}^d} |x+a|^2 (2\pi(t-s))^{-d/2} e^{-|x|^2/2(t-s)}\, dx - |a|^2 = d\cdot(t-s)$$

だから，確率 1 で

$$E[|B(t)|^2 - dt|\mathcal{F}_s] = d\cdot(t-s) + |B(s)|^2 - dt = |B(s)|^2 - d\cdot s.$$

次に，$M(t) = |B(t)|^2 - d\cdot t$ とおくと，任意停止定理から $\{M(t\wedge\tau_r)\}$ もマルチンゲールである．これから

$$E[|B(t\wedge\tau_r)|^2] - |x|^2 = d\cdot E[t\wedge\tau_r]$$

が得られる．$|x| = |B(0)| < r$ だから，左辺には有界収束定理，右辺には単調収束定理を適用して $t\to\infty$ とすると，$|B(\tau_r)| = r$ より，$d\cdot E[\tau_r] = r^2 - |x|^2$ を得る．

6.8 (i) 定理 6.21 の a, b をそれぞれ $a-x, b-x$ におきかえて，

$$P(B_x(t)\in da, M_x(t)\in db) = \frac{2(2b-a-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left(-\frac{(2b-a-x)^2}{2t}\right)\, da\, db, \quad a\leqq b,\ x\leqq b.$$

(ii) $M_x(t)$ の確率密度関数は，(i) の同時分布の密度関数を a について $(-\infty, b)$ 上積分をして，

$$\int_{-\infty}^{b} \frac{2(2b-a-x)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(2b-a-x)^2/2t}\, da = \int_{-\infty}^{b} \frac{d}{da}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(2b-a-x)^2/2t}\right)\, da = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(b-x)^2/2t}.$$

次に，f を $[0,\infty)$ 上の非負可測関数とすると，

$$\begin{aligned}
E[f(M_x(t) - B_x(t))] &= \int_x^\infty db \int_{-\infty}^{B} da\ f(b-a)\frac{2(2b-a-x)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(2b-a-x)^2/2t} \\
&= \int_x^\infty db \int_0^\infty dc\ f(c)\frac{2(b+c-x)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(b+c-x)^2/2t} \qquad (b-a=c) \\
&= \int_0^\infty f(c)\, dc \int_0^\infty \frac{2(\beta+c)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(\beta+c)^2/2t}\, d\beta \qquad (b-x=\beta) \\
&= \int_0^\infty f(c) \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-c^2/2t}\, dc.
\end{aligned}$$

従って，

$$P(M_x(t) - B_x(t) \in dc) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-c^2/2t}\, dc, \qquad c>0.$$

つまり，任意の t に対して $M_x(t) - B_x(t)$ と $|B_0(t)|$ の確率分布は一致する．

同様に (i) を使うと，

$$\begin{aligned}
E[f(2M_x(t) - B_x(t))] &= \int_x^\infty db \int_{-\infty}^{b} da\ f(2b-a)\ \frac{2(2b-a-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}\ e^{-(2b-a-x)^2/2t} \\
&= \int_x^\infty db \int_b^\infty dc\ f(c)\ \frac{2(c-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}\ e^{-(c-x)^2/2t} \qquad (2b-a=c) \\
&= \int_x^\infty dc \int_x^c\ f(c)\ \frac{2(c-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}\ e^{-(c-x)^2/2t}\, db \\
&= \int_x^\infty f(c)\ \frac{2(c-x)^2}{\sqrt{2\pi t^3}}\ e^{-(c-x)^2/2t}\, dc,.
\end{aligned}$$

従って，

$$P(2M_x(t) - B_x(t)\in dc) = \frac{2(c-x)^2}{\sqrt{2\pi t^3}}\ e^{-(c-x)^2/2t}\, dc, \qquad c>x.$$

特に，$\{R^{(3)}(t)\}$ を 0 を出発する 3 次元 Bessel 過程とすると，$x=0$ のとき任意の $t>0$ に対して $2M_0(t) - B_0(t)$ と $R^{(3)}(t)$ の確率分布は一致する．