

特集 / 波 の魅力と数理

波の魅力とその数理

藤 定義

1. はじめに

波動は基本的な自然現象で、とりわけ線形波は古くから研究されてきた。近年非線形系の研究が進み、旧来の波動の概念は大きく変わりつつある。今回の特集では、自然現象の理解において波動の果たしてきた役割を歴史的に概観するとともに、最近の波動にまつわる現象や数理的な発展を併せて特集することで、より広い意味での波動研究の前線を紹介したい。

ところで波とは何を指すのであろうか。文字通り、そのイメージは水面変位の時空発展にあるだろう。北斎の富嶽三十六景神奈川沖浪裏では大きな波が描かれている。この大きな波は動きの一瞬をとどめているが、誰もが次の瞬間に波が動き崩れ始めるであろうことを知っている。波とは、空間的に広がった領域に起きた空間変動が時間的に発展し移動する現象でこの意味で波動とも呼ぶ。

光や音波、弾性波はその典型である。これらは波動方程式に従う線形波としてモデル化される。考えている空間が一様で充分広い場合、三角関数を固有関数とする展開 (Fourier 変換) が可能である。この固有関数は単色波と呼ばれるが、様々な波動現象を理解する基準モードとして有効に役立つ。非線形性が効くようになると、この基準モー

ドは変形を受け、他の基準モードと相互作用を行うようになる。しかし、非線形性が弱ければ基準モードに対する摂動を考えればよい。このような取扱いは弱非線形理論と呼ばれている。単色波の摂動に対するロバスト性は、現象を理解するためのモデル化や方程式の簡略化の典型となる。非平衡系において周期的な空間パターンが自発的に形成される場合にも、弱非線形理論が適応できる。以下、運動する周期構造や孤立波あるいは界面などの局在構造も広い意味での波動現象と見なす。

波動現象は多岐にわたるが、大雑把には線形と非線形、保存系と散逸系に分類できるであろう。さらに、非線形波は弱非線形波と強非線形波に分けられる。弱非線形波は、線形波を基本とした摂動論に基づくもので KdV 方程式や非線形 Schrödinger 方程式などのソリトン方程式もこの弱非線形波に分類できる。強非線形波は例えば北斎の絵に見られる大きな波のように基礎方程式を直接解くことが必要なものを指す。

散逸系の波動としては、保存系に対する散逸効果が摂動として加わった系、音波の衝撃波などがある。更に、パターン形成と呼ばれる特定の周期構造が発生する現象に見られる波動も含めることができるだろう。これらには、現象を記述する方程式のレベルでの類似性も見られる。いずれも連続体の現象である。