August 2003 MATHEMATICAL SCIENCES Number 482

特集／虚数のプロフィル

虚数のイメージ

その“虚”から本質への移り変り

荒 木 不 二 洋

方程式を解くときの便宜上仮の数として考案された虚数が，ガウス，コーシーなどの大数学者の手をへて数学の表舞台に登場したのは 19 世紀のことである．

その結果，物理学においても計算や記述の便宜上，複素数が使用されるようになったが，20 世紀の物理学における革命の一つである量子力学において，複素数は物理学上本質的な役割を獲得するに致った．

このような虚から本質への移り変りを，数学と量子力学に分けて概観してみよう．

第 1 部　数学における虚数

1. 方程式と虚数

虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ は 2 次方程式

$$x^2 = -1$$

の解の一つとして導入できる．しかしそれだけでは虚数を考えなければならない必然性はない．ヨーロッパでは 15 世紀半ばから代数方程式の解法から数学が進歩を始めたが，最初は負の数でさえ，方程式の解として取り扱っていないようである．16 世紀のカルダノ[*1)]に到って，正の根を実の根と呼び，負の根を仮の根と言って採用していたという．

ところが，3 次方程式の根の公式（カルダノの公式と呼ばれる）に到って，実は虚数の使用の必然性が生じてきた．3 次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \qquad (1)$$

の根に対するカルダノの公式は

$$x = (-b + \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta})/(3a) \qquad (2)$$

である．ここで，α, β は 2 次方程式

$$t^2 + At + B^3 = 0 \qquad (3)$$

の 2 根で，その係数 A, B は

$$A = 2b^3 - 9abc + 27a^2 d,$$
$$B = b^2 - 3ac$$

である．(3) 式の根はよく知られた公式で

$$\alpha = (-A + \sqrt{A^2 - 4B^3})/2,$$
$$\beta = (-A - \sqrt{A^2 - 4B^3})/2$$

*1)　Gerolamo Cardano（カルダノ）．イタリア人，1501 年–1576 年．方程式の虚根を知っていた．