

特集/ツイスター理論の拡がり

ツイスターがもたらしたもの

高崎 金久

1. ツイスター理論の起源

ツイスター理論はペンローズ (R. Penrose) が時空の幾何学・物理学に対する新たなアプローチとして1960年代に創始したものである。ペンローズはツイスター理論の起源や目標について様々な解説を書いているが、その中でも“On the origin of twistor theory”と題した記事^{*)}はツイスターの概念に思い至った背景や初期の研究に詳しいので、歴史的経緯に関心のある方には一読をお奨めしたい。ツイスター理論は今日では様々な場合に一般化されているが、以下では4次元時空の場合に話を限定して、その基本的な考え方を説明する。

ツイスター理論では時空 M とは別に「ツイスター空間」と呼ばれる複素多様体 Z を用意して、その上の複素解析の対象や複素幾何学的構造によって時空上の場や時空自体を記述する。このような見方の背景には、数学的に見れば実数よりも複素数のほうが美しく完全な対象であり、物理学においても量子力学が複素数を基礎として定式化される、という事実がある。さらに、相対論的時空の1点を通る光線の集合がリーマン球面と同一視できる、ということも物理学と複素幾何学との関連を示唆している。この光線の集合の複素構造はツイスター理論の中にそのまま生かされている。要す

るに、時空の物理学を複素多様体の言葉で理解したい^{*)}、という願望から生まれたのがツイスター理論である。

そのような理念を実現する一つの安直な考え方はミンコフスキー時空 M を4次元複素多様体 $CM = C^4$ (M の「複素化」) に置き換えることであるが、ペンローズは少なくとも最初の段階ではそのようには考えなかった。 M を CM に置き換えることは観測にかからない「余剰次元」の導入を意味するが、ペンローズにはその物理的理由が見出せなかったのである。同じ意味で、ペンローズは超弦理論の10次元時空や M 理論の11次元時空にも異議を唱える。

ツイスター理論に思い至る過程で重要な手がかりとなったのがロビンソン (I. Robinson) やカー (R. Kerr) によるマクスウェル方程式・アインシュタイン方程式のある種の特解の研究である。ここではなぜか正則関数が重要な役割を演じるように見えた。ペンローズはこの事情を明らかにするため、これらの特解に伴って時空に現れるロビンソン叢 (Robinson congruence) と呼ばれる幾何学的構造を調べた。そして、その背後に3次元

*1) ペンローズはもともと数学の出身であり、ケンブリッジ大学に入学してからホッジ (W.V.D. Hodge) のもとで代数幾何学を学んだ。ただし、その後まもなく研究テーマを変えてトッド (J. Todd) に師事した。