April 2013 MATHEMATICAL SCIENCES Number 598

特集／解析学における様々な発想

解析学の発想

儀 我 美 一

数学でいう「解析」とは何であろうか．一般用語の「解析」とは意味が異なる．手許の国語辞典，例えば『新明解国語辞典（第4版）』（金田一他，三省堂）によると，「解析」は「複雑な機構をもつ現象を解明するために細かく分析すること」と説明されている．数学では漠然と「関数」を研究することと考えられている場合も多いが，これは関数をテーラー展開したりフーリエ展開するなどして，無限個の項の和に分解して研究してきたことに由来する．このような発想は確かに関数の性質を調べる上で重要である．本特集の後藤俊一氏の解説は，「展開」という考え方の有用性についてわかりやすく説明している．しかし「関数」を扱いさえすれば「解析学」に取り組んでいるということにはならない．数学における「解析学」とは「極限や収束を扱う分野」であると考えるのが自然であろう．McGraw-Hill（マグロウヒル）社の《Dictionary of Scientific and Technical Terms》（科学技術用語辞典）にもそのように説明されている．例えば「変数を少しずらしたとき，関数の値や性質がどう変化するか」という問いは，解析学的な問題意識といえよう．

代数方程式を研究するから代数学，微分方程式を研究するから解析学と呼ばれるわけではない．2次方程式を考えよう．係数が少しずれると解も少しずれるが，それがどのようにずれるか，値が急に大きく変わるのか，それともゆるやかに変わるのかという問題は，解析の問題である．行列の成分を変化させると行列の固有値がどのように変わるかを見る，これも解析の問題である．

2次方程式のような代数方程式の解について考えてみると，代数学の立場からは，解の公式はどうなっているか，どのような操作で解が得られるかが重要になってくる．それに対して，解が存在するか，あるいは解の値の大きさはどの程度かを見積もることは，解析の問題といえる．「n 次方程式には必ず n 個（重複も許す）の複素数解が存在する」というガウスの定理は，通常「代数学の基本定理」と呼ばれ，いくつか証明方法が知られている．なかでも「解析」の発想による証明のうちワイエルシュトラスによるものなどは，代数的操作の繰り返しで一般に解が得られない場合に，解をうまく近似していくことで解決するものである．ここで大きさを見積もる，また近似の度合いを調べるためには，どうしても「不等式の発想」が必要になる．本特集の小澤徹氏による解説では，不等式の発想の重要性が様々な角度から述べられている．特に微分方程式の解の存在問題は，解析的発想がよく生かされ得る問題である．解が具体的な関数で表せない場合にも解があることを示すことは大変重要であり，上述のガウスの定理も解表示なしで解の存在性を示したものである．ある微