May 2013 MATHEMATICAL SCIENCES Number 599

特集／次元の作法

巻頭言

次元とは何か

米谷 民明

人間社会には誰でもが従うべき「作法」というものがある．異なった個性を持ち，様々な違った経験，環境，言語，習慣の中で育ってきた個々の人間が共通の土俵の上で協力し，競い合い，助け合える社会が成り立ち機能しているのも，人間がこれまで培ってきた最低限の共通の作法を通じてである．学問にも当然そのような作法とでも呼ぶべきものがある．本特集で取り上げる「次元」には，自然科学とくに物理学における一種の作法という側面が確かにある．日常生活でも比較できないものを「次元が違う」という言い方をよくする．物理学の次元も，これを精密にしたものである．一般的な立場から「次元とは何なのか」について考えてみよう．

物理的次元と幾何学的次元

ここで言う「次元」は，空間の（幾何学的）次元ではなく，物理量の「物理的次元」のことである（数学の観点からの次元については，本特集の加藤氏の解説を参照のこと）．同じ用語を用いるが，この 2 つの次元は概念的には違う．しかし，空間の次元と物理的次元の間には密接な関係にある．例えば，空間に任意の形をした広がった物体があるとしたとき，もし物体全体を一様に a 倍に引き伸ばしたならば，その体積は a^3 倍になる．ここに現れた冪の 3 は空間の次元数に等しい．もし空間の次元が私たちが生きている 3 次元ではなく，d 次元ならその体積は全体の引き伸ばしにより，もとの体積の a^d 倍になる．この例に現れた次元は「長さ」あるいは「距離」の次元だ．つまり，体積という物理量は，長さに関して空間の幾何学的次元 d に等しい物理的次元を持つ．これを [体積の次元$=\mathrm{L}^d$] と表すことが慣習（文字通り物理の作法の 1 つで，高校物理でも取り上げられるべきもの）になっている．以後，ローマン活字で次元を表す．普通の物理量や自然定数など数値を代入できるものは，通常のようにイタリックのローマ字で表すので注意してほしい．

体積の次元については次のような表現も可能だ．今考えている体積を，それと相似な形で長さのスケールが $1/a$ に縮まった微小体積の細胞を埋め込み合成し，もとの体積全体を覆うとしよう．そのとき必要最低限の細胞の個数 $N(a)$ が $a \to \infty$ で $N(a) \sim a^d$ と振る舞うならば，もとの体積が占める空間の次元は d である．これをもって任意の形の幾何学的対象物の幾何学的次元の定義として採用することもできる．通常の幾何学では分類できないような複雑な対象に対して用いられるフラクタル次元は，基本的にこれと同じ考え方に基づく．

単位と次元

以後，物理的次元のことを単に次元と呼ぼう．ここでは日常用語から出発したので，長さを「引き伸ばす」と表現したが，物理的次元を考える際に