October 2015 MATHEMATICAL SCIENCES Number 628

特集／幾何学と解析学の対話

巻頭言

山田 澄生

本巻のテーマは「幾何学と解析学の対話」である．「地面（geo）の測量（metry）」を語源とする幾何学（geometry）は，ものの「かたち」を研究する分野であり，解析学は即物的には「関数」を，もう少し本質的には「連続体上の極限や収束」を研究する分野である．「かたち」を表す手段として関数を用いるのは自然であり，また「関数」の性質を表現するのに，その関数のかたちを掴もうとするのは当然であろう．この意味で幾何学と解析学は互いに補完的な役割を果たしてきた．この特集に寄稿してくださった先生方には，それぞれの研究の最先端において「かたち」と「関数」が，互いにどのような呼応をしているかを報告をしていただいた．

「かたち」を表す関数として，もっとも直感的なものは，その大きさであろう．特に長さ，面積，体積はかたちの幾何学と密接に関連している．2次元ユークリッド空間の有界領域の面積とその領域の境界の長さの間には等周不等式という関係が恒等的に成立しており，また不等式が等式になるとき，その領域がもっとも対称性の高い円板のときに限るということが知られている．小林氏の論説は，円や球に代表される「良いかたち」を等周不等式の証明方法を精査することで解析的にどのように捉えるかを検証し，それが近代微分幾何学の一つの潮流をなす「山辺の問題」と密接に関連していることを解説する．

私たちが「かたち」という言葉を思い浮かべるときには静的なイメージを伴うことが多い．その一方で時間変化の伴った「かたち」を種々の関数を用いて描写することで，幾何学的空間のもつ動的な多面性を探求する問題意識として，力学系と確率論が挙げられる．塚本氏の論説においては，ある集合が（離散的）時間発展する状況の複雑性を測るエントロピーおよび平均次元と呼ばれる関数を紹介する．これらの関数は，「力学系」という対象を広義の意味での「かたち」として捉え，その「大きさ」を描写する．ここで紹介される概念は，まだ多くの数学者にとって馴染みの薄いものであるが，それだけに新しい幾何学の息吹を感じられる．一方で桒田氏による論説では，あるリーマン多様体上でのランダム・ウォーク（酔歩）を表現する確率過程という関数の特徴を読み取ることで，その空間の微分幾何学的な性質を抽出することが可能であることが紹介される．幾何学的空間上での確率論と，その空間上に定義されたリッチ曲率，調和関数，熱方程式等との定量的な関係性の理解は，近年大きく進んだ．その顕著な例として，ペレルマンによるポアンカレ予想の解決の証明の中枢をなしている熱核の解析が挙げられる．

ニュートンは，ケプラーが定式化した惑星の軌道という「かたち」から，微分方程式という解析学