November 2015 MATHEMATICAL SCIENCES Number 629

特集／フーリエ解析の探究

フーリエ解析とは何か

磯崎 洋

科学史というと少し大げさですが，歴史的経緯を簡単にでも知っていれば自然科学の理解が深まります．学問は引き絞られた弓がはじけるように大きく変化する瞬間があります．19 世紀に数学の大きな発展があり，現代の自然科学はこの近代数学の基礎の上に築かれているのですが，フーリエ解析はこのことを例示する恰好のテーマです．現代のフーリエ解析の話に入る前にこの橋渡しの部分を知っておきましょう．

弦の振動を記述する波動方程式 $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ は 18 世紀半ばにダランベールによって導かれていました．ダランベールやオイラーはこの方程式の解が任意の関数 $f(x), g(x)$ を用いて $f(x-t)+g(x+t)$ という形に書けることに気がつきました．一方ベルヌーイは三角関数を重ね合わせた $\sum_n a_n \cos nt \sin nx$ という解があることを発見しました．振動現象にたち帰れば，すべての解はこう書かれるに違いない，したがって $f(x-t)$ は三角関数の重ね合わせで書ける，とくに $t=0$ としてどんな関数も $f(x)=\sum_n a_n \sin nx$ という形に書ける，ということになります．これが本当かどうかが論争になりました[1]．

この問題が深刻だったのはその頃はまだ関数とは何かというはっきりした認識がなかったからです．18 世紀までは関数といわれれば何らかの式で書かれたものを想像するのが普通だったようです．関数とは何かが分かっていなかったのですから，すべての関数を表示する，といわれても雲をつかむような話にきこえたのではないでしょうか？

フーリエが熱方程式の研究をまとめてパリのアカデミーに投稿したのは 1807 年です．「熱の解析的理論」は線形偏微分方程式を解く組織的な手段として三角級数論を捉え，統一的な数理物理学の研究方法を提唱する画期的なものでした[2]．これは解析学の大きな展開点だったのですが，その真価が認められるには長い時間が必要でした．1811 年には数学大賞を受賞するのですがその論文が刊行されたのは 1822 年でした．当時の中心的な数学者にとっても確信のもてない問題を含み全面的には支持されなかったのです．関数の今日的定義（実数の空間からそれ自身への写像）を定式化し，フーリエ級数の収束の十分条件を与えた 1829 年のディリクレの論文は重要です．当時は解析学の基礎を固めつつある時代でした．フーリエ解析はこの気運の中に重要な問題を提起したのです．リーマンは三角級数に伴って積分概念の拡張を考えました[3]．カントールはフーリエ級数の収束問題を通じて集合論へと進んでいます．

フーリエ解析は現実問題をよく反映していました．定数係数の微分方程式は固有振動に分解することによって係数の代数方程式にかわります．変数係数の微分方程式も，具体的には解けないにせ