

序文

本書は、主として物理現象を例に取り、現象の本質を記述する言葉（言語）である数学の機能が書き込まれ埋め込まれた対象としての微分方程式を論じたものである。その解読の過程において、現象の本質をより深く理解する視点を獲得しつつ、数学的抽象概念や公理系などを現象に結び付けて理解する方法論を探り、微分方程式を通じて現象に潜む数学的構造を捉えることにより、現象の本質に迫って行くことが本書の目的である。

本書は微分方程式の教科書でも入門書でもない。求積法は一切扱わない。現象に迫るといいながら、方程式の導出の説明もしない。それらについては、数学や物理学の別の本を参照していただきたい。数学的主張には証明が付き物であるが、標準的なものは省略したところもある。一方、標準的な理論に対しては、新しい視点から捉え直した記述もある。詳しく書いた定理や証明の中には、本書が初出となるものもある。本書は16の章から構成されているが、体系的な理論構成を取っていないため、各章の内容の関連性は比較的弱くなっている。基礎知識のある読者ならば、何処からでも読み始めることができる筈である。

本書は通常の数学専門書と異なり、数学的記述に潜む数理物理学的視点・発想さらには思想・哲学まで踏み込んだ議論も、一部ではあるが含んでいる。本書の題名「数理物理学としての微分方程式序論」は、そうした側面を反映したものである。英語の題名を付けるとすれば、“An Introduction to Differential Equations as a Subject of Mathematical Physics”となるだろう。

本書の内容の一部は、早稲田大学 先進理工学部 物理学科・応用物理学科、大学院 先進理工学研究科 物理学及応用物理学専攻における講義に基づくものである。本書は『数理科学』に2014年7月号から2016年7月号にわたって連載した記事「微分方程式を考える —数学は現象をいかに記述しているか—」に加筆した内容となっている。連載中は、読者の激励と、編集部の大溝良平様のご尽力に支えられた。厚く御礼申し上げます。

2016年7月

小澤 徹

目次

第 1 章	序論—微分方程式の記述する現象とは何か—	1
1.1	現象のモデル化と微分方程式	1
1.2	解の概念	6
1.3	解がなくても分かることと解いて初めて分かること	9
1.4	微分方程式の記述する現象とは何か	10
第 2 章	力とベクトル場	11
2.1	ベクトルとは何か	11
2.2	ベクトル空間の定義	12
2.3	構造と力	13
2.4	アフィン空間を平行移動による同値類で割った商空間として構成されるベクトル空間とその同型	14
2.5	ノルム空間と内積空間	17
2.6	ベクトル場と積分曲線	18
第 3 章	ニュートン力学の基礎的枠組み	20
3.1	ガリレイ時空：時間と空間の分離	20
3.2	ガリレイ変換とその構造	21
3.3	ガリレイ時空の直積表示	23
3.4	相空間	24
3.5	二階のベクトル場	25
3.6	ニュートン力学の基礎的枠組み	27
第 4 章	常微分方程式の初期値問題の局所解	29
4.1	バナッハの不動点定理	29
4.2	常微分方程式の初期値問題—完備性に基づく解法—	30
4.3	部分列と対角線論法	32
4.4	アスコリ・アルツェラの定理	33
4.5	常微分方程式の初期値問題—点列コンパクト性に基づく解法—	34
第 5 章	常微分方程式の初期値問題の大域解	38
5.1	基本設定	38
5.2	リプシッツ連続相速度場の場合	39
5.3	局所リプシッツ連続相速度場の場合	40
5.4	狭義局所リプシッツ連続相速度場の場合	43

第 6 章	ニュートンの運動方程式の初期値問題の大域解	47
6.1	ニュートンの運動方程式に対する初期値問題の解の存在と一意性	47
6.2	集中型自己相互作用場の下での古典軌道	49
6.3	平面運動を引き起こす力場	54
6.4	平面への座標の導入	57
6.5	中心力場の場合	59
6.6	非集中型自己相互作用場の下での古典軌道	60
6.7	直線上の古典軌道 (1 次元の場合)	62
6.8	平面上の古典軌道 (2 次元の場合)	67
第 7 章	摩擦力と解の絶滅現象	71
7.1	摩擦力の導入	71
7.2	時間大域解の定義	71
7.3	時間大域解の一意性	73
7.4	近似解の構成	74
7.5	コンパクト性による時間大域解の構成	75
7.6	解の絶滅現象	76
第 8 章	調和写像としてのニュートンの運動方程式	78
8.1	調和写像のモデル化としてのニュートンの運動方程式の導入	78
8.2	単位球面上に束縛された質点の運動	81
8.3	平面内の単位円周上に拘束された点の運動と三角関数	83
8.4	調和写像方程式としてのニュートンの運動方程式	84
第 9 章	指数法則と指数写像	86
9.1	有界線形作用素に対する指数写像	86
9.2	非有界線形作用素に対する指数写像	92
第 10 章	摂動論的方法による半線形発展方程式の解法	94
10.1	問題の設定	94
10.2	リプシッツ摂動の場合	95
10.3	局所リプシッツ摂動の場合	96
10.4	C_0 半群の生成作用素の定義域における局所リプシッツ摂動の場合	99
10.5	部分的局所リプシッツ摂動の場合	100
第 11 章	摂動論的方法による半線形発展方程式の解法の実例	103
11.1	非線形波動方程式の数学研究の歴史的概観	103
11.2	初期値・境界値問題と臨界ソボレフ埋蔵	104
11.3	初期値問題とストリッカーズ評価	107
11.4	小さな摂動による時間大域解	109

11.5	零形式	110
11.6	フーリエ制限法	110
第 12 章	非摂動的な方法による非線形発展方程式の解法	112
12.1	線形偏微分方程式と変数変換	112
12.2	非線形偏微分方程式と変数変換	113
12.3	無限次元ハミルトン系の弱解の構成	114
第 13 章	ミンコフスキ時空とローレンツ変換	120
13.1	ガリレイ時空とミンコフスキ時空	120
13.2	ローレンツ変換とその構造	121
13.3	座標変換としてのローレンツ変換	125
第 14 章	対称性と微分作用素	135
14.1	ガリレイ時空における変換族とその生成作用素	135
14.2	球面上のラプラス作用素	137
14.3	ミンコフスキ時空における変換群とその生成作用素	139
14.4	双曲面上のラプラス作用素としてのダランベール作用素	139
14.5	回転対称性と微分作用素	141
14.6	現象の記述における二階微分作用素の位置付け	143
第 15 章	共形変換	144
15.1	共形変換の定義と例	144
15.2	線分の特徴付け	150
15.3	共形変換の構造定理	151
15.4	共形変換群の作用と線形表現	165
第 16 章	場の古典論を担う非線形偏微分方程式	170
16.1	不変ソボレフ空間	170
16.2	古典場のラグランジュ形式	172
16.3	古典場のハミルトン形式	174
16.4	古典場の数学的基礎をなす諸概念の関係	176
16.5	様々な臨界相互作用	177
16.6	現象を記述する学問としての数学	178
	参考文献	181
	索引	188