

SGC ライブラリ - 57

3次元トポロジーの新展開

リッチフローとポアンカレ予想

戸田 正人 著

サイエンス社

まえがき

本書を手にする読者は御存じの方も多いと思うが、2002 年 11 月に発表されたペレルマンのプレプリント [43] はその数ヵ月後に発表された [45] と併せて、リッチフローを用いて、3 次元多様体に関するサーストンの幾何化予想を解決するというハミルトンプログラムを実装することを目的とする。(サーストンの幾何化予想は、3 次元ポアンカレ予想を一部として含み、その解決から、ポアンカレ予想の解決が導かれる！) [43] ではリッチフローに関する斬新な考察を基に 3 次元あるいは一般次元のリッチフローについての多くの重要な結論が導かれた。一方 [45] はハミルトンプログラムの実装に [43] の諸定理を応用する技術的な議論をまとめたものである。もう少し詳しくいえば、[45] はその冒頭で述べているように、[43] の最後の章に簡単に触れられていたハミルトンプログラムの実装のスケッチが含んでいたいくつかの問題点を非常に技術的な議論で回避してハミルトンプログラムの一部、しかし、幾何化予想の全て、の解決を主張するものである。

本書の目的は基本的アイデアのほとんどを含む [43] のうち、3 次元多様体の幾何化予想に直接関わる主張について解説することである。第 3 章の後半の一部と第 4 章の内容は 2004-2005 年に筆者が行った講演や集中講義、とりわけ 2005 年に筆者が名古屋大学で行った院生向け集中講義の原稿を基にして相当加筆したものであるが、他の部分は本書のために執筆した原稿である。対象とする読者は数学科大学院修士以上の学生ということになるが、本書のテーマを考慮すれば、関連分野の専門知識を有する方々なども読者として想定せざるを得ない。このテーマ自身重いテーマであるが、この二つの読者層を想定しながら 200 ページ弱のテキストを執筆することは筆者にとってはさらに至難の技であった。筆者の力不足から、この目的が達成できているかどうかは心もとない。

ページ数と本書の対象を考えれば self contained な記述を行うことは望むべくもないが、なるべく簡単な原理に帰着することにより、できるだけ証明の中身を理解できるようにしたつもりではある。この方針はペレルマン自身の議論が最先端の道具の破壊力を駆使するというタイプのものではなく、鋭いアイデアで伝統的な道具に驚くような働きをさせる、という性質のものだからということもある。一方、証明しない主張のスケッチや「大体の話」を述べる、ということは避け、参考文献にゆずるという方針にした。これは一部の読者には証明そのものが関心事であろうと思うからである。本書全体の構成について簡単に述べておく。

最初の章では 3 次元多様体の位相幾何学について証明なしで概観し、幾何化予想の主張を確認する。1.3 節では本書の各節の主張がハミルトンプログラムのなかでどのような役割を果たすかを具体的に記述してある。第 1~3 章の一部を読み飛ばすつもりの読者はここで本書の全体の構造とハミルトンプログラムの関係を確認してほしい。第 2 章は議論に必要なリーマン幾何について解説してある。ある程度の前提は仮定するものの、この章では基本的な命題から証明を与えている。とくに測地線に関係する命題には初歩的と思われるものにも証明を付けた。一つの目的は 3.4 節でリー

マン幾何における測地線の類似物を考えるため、その議論の「形」を確認しておきたかったからである。第3章でリッチフローを導入する。リッチフローの初期値問題の解の存在の問題について述べた後、3.2節で最大値原理について論ずる。リッチフローを解析する上でこれは最も重要な道具の一つだが、我々の目的に議論を最適化するため、伝統的なものとはだいぶ趣の異なる書き方をしている部分がある。また、この節の後半からはかなり直接的にペレルマンの議論と関係する主張を述べていく。3.3節では基本的なリッチフローの解析的評価を行う。とくに3.3.3節のコンパクト性定理はペレルマンの議論で重要なものである。3.4節では[43]の重要な結論の一つ、局所非崩壊定理を証明する。この結論はリッチフローの次元によらないものである。最終章でペレルマンの3次元リッチフローの特異性解析について述べる。4.1節で3次元の特異性モデルの分類を行い、4.2節でそのモデルによる近似に関するペレルマンによる重大な結論、標準近傍定理の証明を行う。最後にその応用として、3次元リッチフローの特異性が生じたとき、その位相がどのように変更されるかを見る。

幾何の専門家が本書を読む場合、状況に応じて第1～3章の一部から必要な基礎知識を補った上で、2.2.5, 3.2.4, 3.3.3節および3.4節以降を読めば十分であると思う。また必要に応じて演習問題を付した。これは演習のため、というより記述を簡潔にするため次のいずれかのカテゴリに属する場合には演習問題にまわしたものである。(a) 本文と直接関連する計算などで自明に近いもの。この種の問題はやさしいはずである。(b) 本文の流れから触れない理由がないが、本書を理解するために必要ないもの。自明でないものも含まれているかもしれないが、こちらは読み飛ばしても本筋には関係ない。

いくつか本書の記法に関する注意をしておこう。

1. アインシュタインの記法などテンソル計算の標準的記法、例えば $g^{ij} \text{Rc}_{jk} = \text{Rc}_k^i$ といった記法を用いる。
2. 解析的な評価を行う際、あまり重要でない定数はとくに断りなく c, C などと書いてしまう。小文字の c は次元のみに依存するいわゆる普遍定数を表し、大文字の C は曲率など評価の前提になっている量に依存する場合に用いる。
3. 変数 t は（リッチフローの）時間パラメータとして区別するため、他の用途に用いるのはなるべく避けた。例えば、曲線やその変分のパラメータとして通常 s, t を用いるところを s, u を用いるようにした。

筆者がペレルマンのプレプリントを理解する上で、いろいろな方にさまざまな形で機会を用意していただいた。研究集会での講演や集中講義などの機会をいろいろと用意していただいた筑波大学の山口孝男先生、多くの興味深い見方を教えていただき、とくに2005年の名古屋大学で集中講義の機会を与えていただいた名古屋大学の小林亮一先生に感謝したい。また長時間の講演の機会をいただいた九州大学の天津幸男先生、大阪大学の後藤竜二先生にも感謝申し上げる。長時間に渡る講演を聴講していただいた方々にもあわせてお礼申し上げたい。最後になるが、本書の執筆の機会を与えていただき、なかなか進まない筆者の原稿を辛抱強く待ちつづけたサイエンス社の平勢耕介氏に感謝の意を表したい。

2007年1月

戸田 正人

目 次

第 1 章	3 次元多様体とハミルトンプログラム	1
1.1	標準分解	1
1.2	幾何化	6
1.3	ハミルトンプログラム	10
第 2 章	リーマン幾何	15
2.1	局所理論	15
2.1.1	測地線と第一変分公式	15
2.1.2	第二変分公式とヤコビ場	21
2.1.3	ラウチの比較定理	28
2.1.4	ブーザー・カルヒャー型評価	33
2.1.5	体積の評価	37
2.2	大域理論	42
2.2.1	トポノゴフの比較定理とアレクサンドロフ空間	42
2.2.2	モース理論と距離関数	48
2.2.3	全凸集合と凸関数	53
2.2.4	完備非負曲率多様体	57
2.2.5	計量錐とグロモフ・ハウスドルフ収束	64
第 3 章	リッチフロー	69
3.1	リッチフローの方程式	69
3.1.1	方程式と特殊解	69
3.1.2	初期値問題	74
3.1.3	リッチフローの主枠束と曲率の方程式	82
3.2	最大値原理	89
3.2.1	スカラー熱方程式の場合	89
3.2.2	テンソル熱方程式の場合	94
3.2.3	非負曲率リッチフローへの応用	98
3.2.4	3 次元リッチフローへの応用	101
3.3	基本評価	106
3.3.1	局所曲率微分評価	106
3.3.2	正規座標上の局所評価	111

3.3.3	収束とコンパクト性	117
3.4	局所非崩壊定理	125
3.4.1	κ -非崩壊性	125
3.4.2	$\mathcal{L}$ -汎関数の変分公式	128
3.4.3	局所 $\mathcal{L}$ -幾何	134
3.4.4	$\tilde{V}$ の単調性と定理の証明	140
3.4.5	その他の帰結	145
第 4 章	リッチフローの特異性	149
4.1	κ 解の性質	149
4.1.1	漸近ソリトン	149
4.1.2	漸近体積比	153
4.1.3	コンパクト性	157
4.1.4	構造と分類	162
4.2	標準近傍定理	167
4.2.1	主張と証明の概観	167
4.2.2	局所極限	168
4.2.3	大域収束	171
4.2.4	特異時刻における連結と分解	175
付録 A	技術的準備	181
A.1	実関数	181
A.2	主 G 束と接続	186
A.3	計算上の注意	193
参考文献		195
索引		199

第 1 章

3次元多様体とハミルトンプログラム

3次元多様体のトポロジーの基本的な結果を証明なしで簡単に概観し、ソーストンの幾何化予想とリッチフローを用いた幾何化予想へのアプローチ（ハミルトンプログラム）を紹介する．代表的な3次元トポロジーの教科書として [29] と [31] を挙げておく．

1.1 標準分解

3次元位相多様体はただ一つの PL 構造，微分構造を持つことが知られているから，どのカテゴリーを選択するかは結論には影響しない．([29, Chapter 1], [56, 3.10]) この事情から同相という言葉はどの意味に取ってもよいが，主に可微分3次元多様体を念頭におく．

まず3次元であることに関わらない微分位相に関する事実を述べておこう． n 次元多様体 M に埋め込まれた閉 $n-1$ 次元多様体 Σ の法束が自明束であるとき， Σ を二面的という． M が向きづけ可能であれば，これは Σ が向きづけ可能であることと同値である．このとき， Σ の管状近傍 T_Σ は $\Sigma \times (0, 1)$ と微分同相であるが， $M \setminus T_\Sigma$ は Σ の二つのコピーを境界とする境界つき多様体となる．その微分位相は管状近傍のとり方によらないので，これを $M \setminus \Sigma$ と書くことにし， Σ で切り開いた多様体と呼ぶ． $M \setminus \Sigma$ の二つの境界成分が異なる連結成分に含まれるとき Σ は連結成分を分ける，ということにする．逆に境界つき多様体 Ω とその相異なる境界成分 $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \partial\Omega$ の間の微分同相 $\phi: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ が与えられた時 Σ_1, Σ_2 を ϕ により同一視して得られる多様体 M は包含写像 $\Omega \hookrightarrow M$ が微分同相となるような唯一つの自然な微分構造を持ち，これは ϕ のアイソトピー類のみで決まる．これを Ω を ϕ で張り合わせて得られる多様体と呼ぶ． Ω が向きづけられていて， ϕ が境界の自然な向きを反転すれば包含写像 $\Omega \hookrightarrow M$ が向きを保つように M の向きづけを与えることができる．ここの議論は M が境界つきで， Σ が内部に埋め込まれている場合も同様である．

第 2 章

リーマン幾何

リーマン幾何についてレヴィチヴィタ接続によるテンソル計算，測地線，曲率などは既知とする．例えば，[41, Part II]，[63, 2.5.1] 程度の予備知識を想定する．ただし，3.4 で測地線の類似物を考えるので，測地線に関わる基本的命題の一部は詳しく説明する．モース理論に関して全く予備知識のない読者は 2.2.2 を読む前に [41, Part I] を一読することを勧める．またこの章の題材や参考文献は網羅的なものではない．例えば [6]（有名な教科書），[21] や [17]（モース理論，凸関数，非負曲率多様体についてのサーベイ），[1]（アレクサンドロフ空間の教科書）などから文献を探してほしい．

2.1 局所理論

2.1.1 測地線と第一変分公式

(M, g) を連結リーマン多様体とする．区間 $[a, b]$ のある分割 $a = s_0 < s_1 < \dots < s_N = b$ が存在して各部分区間 $[s_i, s_{i+1}]$ 上で C^∞ 級であるような連続写像 $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ を区分的に滑らかな曲線という． $[a, b]$ 上定義された区分的滑らかな曲線全体を $\mathcal{PS}(M : a, b)$ と表す． $\gamma \in \mathcal{PS}(M : a, b)$ に対して，長さ汎関数は

$$L(\gamma) = L(\gamma : a, b) := \int_a^b \left| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s) \right| ds = \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s) \right| ds$$

で定められる．もちろん， $|\cdot|$ はリーマン計量 g により定まる接ベクトルの長さである． L は γ のパラメータの取り換えに関して不変である．（したがって，定義されている区間 $[a, b]$ は例えばアファインパラメータ変換により任意の閉区間に変換できる．） L により， (M, g) 上には

$$\rho_{(M, g)}(p, q) = \inf \{ L(\gamma) ; \quad \gamma \in \mathcal{PS}(M : a, b), \gamma(a) = p, \gamma(b) = q \}$$

で距離関数 ρ が定められ， (M, ρ) は距離空間をなす．長さ汎関数 L の代わりに

第 3 章

リッチフロー

この章ではリッチフローの基本的な定理や評価について解説する．いわゆる教科書は現時点では [13] が挙げられる．(これからもっと出版されるだろうが.) 3.2.4, 3.3.3 の結論はとくに [43] を理解する上で重要である．ハミルトンを始めとする先駆者達の前論文の一部は論文集 [4] にもまとめられている．最後の節ではペレルマン [43] の中でも重大な結論の一つ，局所非崩壊性について述べる．局所非崩壊性については前論文の他に [59], [42] などの解説がある．

3.1 リッチフローの方程式

3.1.1 方程式と特殊解

M を n 次元多様体, $0 < T \leq \infty$ とする．時刻 $t \in [0, T)$ に滑らかに依存する M 上の計量を $g(t)$ とする． p を射影 $p: M \times [0, T) \rightarrow M$ とすると, g は $M \times [0, T)$ 上のベクトル束 p^*TM 上の切断と見ることができる． $g(t)$ が方程式 $\partial_t g = -2\text{Rc}$ を満たすとき, つまり局所座標成分 g_{ij} が

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(x, t) = -2\text{Rc}_{ij}(x, t) \quad (3.1)$$

を満たしているとき, 時刻に依存する計量 $g(t)$ を時間 $[0, T)$ 上定義されたリッチフローの解という．対応して定まる時間発展するリーマン多様体 $(M, g(t))$ をリッチフローの時空と呼ぶ．(方程式 (3.1) をリッチフローと呼ぶのが論理的だが, 誤解がなければ $g(t)$ あるいは $(M, g(t))$ をリッチフローと呼んでしまう.) また, 時刻 $t = 0$ における計量 $g(0)$ を初期値, 初期計量などと呼ぶ．方程式 (3.1) の偏微分方程式としての性質はあとでもっと詳しく見るが, 熱方程式などに代表される放物型偏微分方程式に近い．

任意の $t_0 \in [0, T)$ に対して, リーマン多様体 $(M, g(t_0))$ が完備であるとき, $(M, g(t))$ を完備リッチフローであるという．もし, $M \times [0, T)$ 上に $C_0 \leq \text{Rc} \leq C_1$ が成り立っていれば, 方程式 (3.1) からただちに

第 4 章

リッチフローの特異性

この章では [43] で行われた特異性解析の基本定理について述べる．具体的には [43, §11, §12] の諸定理の解説である．ペレルマン以前のリッチフローの特異性解析の状況については [27] を参照せよ．[45] または [44] も含めたペレルマンの業績については [35], [42], [5] などの詳細な解説がある．

4.1 κ 解の性質

4.1.1 漸近ソリトン

命題 3.4.3 を念頭におけば，次の定義は（少なくとも 3 次元の場合）特異性のモデルとして順当なものである．

定義 4.1.1 (κ 解). (M, g) を時間 $(-\infty, t_0]$ 上定義された， M 全体で曲率が一樣に有界な完備古代解とする． (M, g) が任意のスケールで κ -非崩壊であり， $\text{Rm} \geq 0$ を満たすとき， κ 解と呼ぶ．とくに断りが無い限り我々は $t_0 = 0$ の場合を考える．

注意 1. κ -非崩壊が任意のスケールで成り立つから，縮小 スケーリングの下でも非崩壊の条件が保たれる．

注意 2. 例 3.1.3 における遠方での体積比評価により，葉巻型ソリトン $(\mathbb{R}^2, g_{\text{cigar}})$ は κ -非崩壊の条件を満たさない．したがって，この定義は $(\mathbb{R}^3, g_{\text{cigar}} \times g_{\mathbb{R}})$ を 3 次元の特異性モデルから排除する．([27] の最後のパラグラフを参照．)

補題 4.1.1. 定理 3.4.6 の曲率条件を満たす古代解に対して， $\partial_t R \geq 0$ ．つまり，スカラー曲率は各点で単調非減少．とくに $t = 0$ において，任意の半径で曲率が一樣有界な κ 解の列は一樣部分収束し，その極限は $\text{Rm} \geq 0$ を満たす任意のスケールで κ -非崩壊な完備古代解である．

付録 A

技術的準備

A.1 実関数

本書全般に渡り、必ずしも滑らかでない関数を扱う場面が多い。滑らかさが仮定されているならば、1 階微分の情報から得られる単調性、2 階微分の情報から得られる凸性、などをもっと弱い条件下で保証する諸技術を準備しておく。まず 1 階微分の一般化を考えよう。

定義 A.1.1 (前方微分, 後方微分). 区間 $[a, b]$ 上で定義された関数 F が $t \in [a, b]$ の近傍で連続であるとする。 C を実数とすると、

$$\limsup_{\Delta t \downarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \leq C \quad \left(\liminf_{\Delta t \downarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \geq C \right)$$

であるとき、 $d_t^+ F(t) \leq C$ ($d_t^+ F(t) \geq C$) と書く。同様に

$$\limsup_{\Delta t \uparrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \leq C \quad \left(\liminf_{\Delta t \uparrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \geq C \right)$$

であるとき、 $d_t^- F(t) \leq C$ ($d_t^- F(t) \geq C$) と書く。 $d_t^+ F$ を前方微分、 $d_t^- F$ を後方微分という。

前方微分、後方微分が定符号であれば、関数の単調性が従う。

補題 A.1.1. F を区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数とする。

1. $F(b) \geq c$ とし、 $F(t) \leq c$ ならば $d_t^- F(t) \leq 0$ を満たすとする。このとき、 $F(a) \geq c$ 。
2. $(a, b]$ 上で $d_t^- F \leq 0$ ならば、 F は単調非増加。
3. $F(a) \leq c$ とし、 $F(t) > c$ ならば $d_t^+ F(t) \leq 0$ が成り立つとする。このとき、 $F(b) \leq c$ 。
4. $F(a) \leq 0$ とし、 $F(t) > 0$ ならば $d_t^+ F \leq cF$ が成り立つとする。このとき、 $F(b) \leq 0$ 。

参考文献

- [1] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov. *A course in metric geometry*, Vol. 33 of *Graduate Studies in Math.* AMS, 2001.
- [2] Y Burago, M. Gromov, and G. Perelman. A.d.alexandrov spaces with curvature bounded below. *Russ. Math. Surveys*, Vol. 47, pp. 1–58, 1992.
- [3] P. Buser and H. Karcher. *Gromov’s almost flat manifolds*, Vol. 81 of *Asterisque*. 1981.
- [4] H.D. Cao, B. Chow, S.C. Chu, and S.T. Yau, editors. *Collected papers on Ricci flow*. International press, 2003.
- [5] H.D. Cao and X-P. Zhu. A complete proof of Poincaré and geometrization conjecture – Application of the hamilton-perelman theory of the ricci flow. *Asian J. of Math.*, Vol. 10, pp. 169–492, 2006.
- [6] J. Cheeger and D.G. Ebin. *Comparison Theorems in Riemannian geometry*. North Holland, 1975.
- [7] J. Cheeger and D. Gromoll. The splitting theorem for manifolds of nonnegative ricci curvature. *J.D.G.*, Vol. 6, pp. 119–128, 1971.
- [8] J. Cheeger and D. Gromoll. On the structure of complete manifolds of non-negative curvature. *Ann. of Math.*, Vol. 96, pp. 413–443, 1972.
- [9] J. Cheeger and M. Gromov. Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded II. *J.D.G.*, Vol. 32, pp. 269–298, 1990.
- [10] J. Cheeger, M. Gromov, and M. Taylor. Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds. *J.D.G.*, Vol. 17, pp. 15–53, 1982.
- [11] B. Chen and X. Zhu. Uniqueness of the ricci flow on complete noncompact manifolds. *arXiv:math.DG/0505447*, 2005.
- [12] B. Chow and S-C. Chu. A geometric interpretation of Hamilton’s Harnack inequality for the ricci flow. *Math. Res. Let.*, Vol. 2, pp. 701–718, 1995.
- [13] B. Chow and D. Knopf. *The Ricci flow: An introduction*, Vol. 110 of *Mathematical surveys and monographs*. AMS, 2004.
- [14] T.H. Colding and W.P. Minicozzi II. Estimates for the extinction time for the ricci flow on certain 3-manifolds and a question of perelman. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 18, No. 3, pp. 561–569, 2005.
- [15] D. DeTurck. Deforming the metric in the direction of their Ricci tensors. *J.D.G.*, Vol. 18, No. 1, pp. 157–162, 1983.
- [16] A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic type*. Prentice-Hall, 1964.

- [17] R.E. Greene. A genealogy of noncompact manifolds of nonnegative curvature: History and logic. *MSRI Publ*, Vol. 30, pp. 99–134, 1997.
- [18] R.E. Greene and K. Shiohama. Convex functions on complete noncompact manifolds: differentiable structure. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, Vol. 14, pp. 357–367, 1981.
- [19] R.E. Greene and H. Wu. Lipschitz convergence of riemannian manifolds. *Pacific J. Math.*, Vol. 131, pp. 119–141, 1988.
- [20] D. Gromoll and W. Meyer. On complete open manifolds of positive curvature. *Ann. of Math.*, Vol. 90, pp. 75–90, 1969.
- [21] K. Grove. Critical point theory for distance functions. *Proc. Symp. in pure math.*, pp. 357–385, 1993.
- [22] K. Grove and K. Shiohama. A generalized sphere theorem. *Ann. of Math.*, Vol. 106, No. 2, pp. 201–211, 1977.
- [23] R.S. Hamilton. Three-manifolds with positive ricci curvature. *J.D.G.*, Vol. 17, pp. 255–306, 1982.
- [24] R.S. Hamilton. Four-manifold with positive curvature operator. *J.D.G.*, Vol. 24, pp. 153–179, 1986.
- [25] R.S. Hamilton. The Harnack estimate for the Ricci flow. *J.D.G.*, Vol. 37, pp. 225–243, 1993.
- [26] R.S. Hamilton. A compactness property of solutions of the Ricci flow. *American Journal of Math.*, Vol. 117, pp. 545–572, 1995.
- [27] R.S. Hamilton. Formation of singularities in the Ricci flow. *Surveys in Diff. Geom.*, Vol. 2, pp. 7–136, 1995.
- [28] R.S. Hamilton. Non-singular solutions of the Ricci flow on three manifolds. *Commun. Anal. Geom.*, Vol. 7, No. 4, pp. 695–729, 1999.
- [29] J Hempel. *3-manifolds*. Annals of mathematics studies. Princeton, 1976.
- [30] H. Jaco and P.B.Shalen. *Seifert fibred spaces in 3-manifolds*. Memoirs of the AMS. AMS, 1979.
- [31] W. Jaco. *Lectures on three-manifold topology*. AMS, 1980.
- [32] K. Johansson. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Vol. 761 of *Lecture notes in Math.* Springer, 1979.
- [33] J. Jost. *Harmonic mappings between Riemannian manifolds*. Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis. Australian National University, 1984.
- [34] A. Kasue. A compactification of a manifold with asymptotically nonnegative curvature. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup*, Vol. 21, No. 4, pp. 593–622, 1988.
- [35] B. Kleiner and J. Lott. Notes on Perelman’s papers. *arXiv:math.DG/0605667*, 2006.
- [36] H. Kneser. Geschlossene flächen in dreidimensionalen mannigfaltigkeiten. *Jahresbericht der Deut. Math. Verein.*, Vol. 38, pp. 248–260, 1929.
- [37] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry I*. John Wiley and

- Sons, 1963.
- [38] S. Lang. *Real Analysis*. Addison-Wesley, 1969.
 - [39] G.M. Lieberman. *Second order partial differential equations*. World scientific, 1996.
 - [40] J. Milnor. A unique factorization theorem for 3-manifolds. *Amer. J. Math.*, Vol. 84, pp. 1–7, 1962.
 - [41] J. Milnor. *Morse Theory*, Vol. 51 of *Annals of Math. Studies*. Princeton Univ. Press, 1969.
 - [42] J.W. Morgan and G. Tian. Ricci flow and poincaré conjecture. *arXiv:math.DG/0607607*, 2006.
 - [43] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applicattions. *arXiv:math.DG/0211159*, 2002.
 - [44] G. Perelman. Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain three-manifolds. *arXiv:math.DG/0307245*, 2003.
 - [45] G. Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. *arXiv:math.DG/0303109*, 2003.
 - [46] S. Peters. Cheeger’s finiteness theorem for diffeomorphism classes of riemannian manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 349, pp. 77–82, 1984.
 - [47] A. Petrunin and W. Tuschmann. Asymptotical flatness and cone structure at inifinity. *Math. Ann.*, Vol. 321, pp. 775–788, 2001.
 - [48] J. G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, Vol. 149 of *Graduate texts in Math*. Springer, 1994.
 - [49] G.P. Scott. The geomteries of three manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, Vol. 15, pp. 401–487, 1983.
 - [50] V. Sharafutdinov. Pogolero-klingenberg theorem for manifolds homeomorphic to $\mathbb{R}^n$. *Sibirsk. Math. Zh.*, Vol. 18, pp. 915–925, 1977.
 - [51] W.X. Shi. Ricci deformation of the metric on complete noncompact Riemannian manifolds. *J.D.G.*, Vol. 30, pp. 303–394, 1989.
 - [52] T. Shioya and T. Yamaguchi. Collapssing three-manifolds under a lower curvature bound. *J.D.C.*, Vol. 56, pp. 1–66, 2000.
 - [53] T. Shioya and T. Yamaguchi. Volume collapsed three-manifolds with a lower curvature bound. *Math. Ann.*, Vol. 333, pp. 131–155, 2005.
 - [54] L. Simon. *Lectures on Geometric measure theory*, Vol. 3 of *Proc. Centre for Math. Anal*. Australian National Univ., 1983.
 - [55] W.P. Thurston. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. of AMS*, Vol. 6, No. 3, 1982.
 - [56] W.P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology*, Vol. 1. Princeton, 1997.
 - [57] F. Waldhausen. Eine klasse von 3-dimensionalen mannifaltigkeiten i. *Invent. Math.*, Vol. 3, pp. 308–333, 1967.
 - [58] W.Ballman, M. Gromov, and V. Schroeder. *Mnifolds of nonpositive curvature*.

Birkhäuser, 1985.

- [59] R. Ye. Notes on reduced volume and asymptotic Ricci solitons of kappa solutions. *preprint*, 2004.
- [60] K. Yosida. *Functional Analysis*. Classics in Math. Springer, 6th edition, 1980.
- [61] 小林亮一. 対数 Sobolev 不等式, エントロピー公式, Riemann 幾何的熱浴. 2006.
- [62] 谷口雅彦, 松崎克彦. 双曲的多様体とクライン群. 日本評論社, 1993.
- [63] 二木昭人. 微分幾何講義, SGC ライブラリ, 第 23 巻. サイエンス社, 2003.

索引

欧字・数字

ε -近似, 117
 ε -頸点, 157
 ε -頸部, 157
 ε -正規近似, 125
 ε -笛部, 178
 ε -バリア関数, 91
 ε -帽部, 175
 ε -歪帽部, 175
(κ, r)-リッチフロー, 126
 κ 解, 149
 κ -非崩壊, 126
 $\mathcal{L}^{\tau_2}$ -最小正則領域, 141
 $\mathcal{L}^{\tau_2}$ -最小跡, 141
 $\mathcal{L}^{\tau_2}$ -切点, 141
 $\mathcal{L}$ -線分, 133
 $\mathcal{L}$ -測地線, 131
 $\mathcal{L}$ -ヤコビ場, 133

ア行

アトロイダル, 4
アレクサンドロフ空間, 47
安定ソリトン, 73
一様収束, 117
永遠解, 73
エンド, 61

カ行

拡大ソリトン, 73
ガトー微分, 75
完備リッチフロー, 69
幾何化, 7
幾何化予想, 9
幾何多様体, 7
基点つきリーマン多様体, 21
既約, 2
強最大値原理, 92
共変微分, 189
共役, 24

局所 ε 分裂, 171
局所収束, 115
曲率形式, 189
曲率作用素, 193
曲率制御, 126
空間接束, 82
空間微分形式, 84
空間ベクトル, 83
グラフ多様体, 5
グロモフ・ハウスドルフ収束, 65
計量錐, 64
広義一様収束, 117
勾配型ソリトン, 73
後方微分, 181
古代解, 73

サ行

最小正則領域, 27
最小跡, 27
最大値原理, 89
ザイフェルト構造, 2
ザイフェルト多様体, 3
時間切片, 83
試験関数, 145
指数形式, 22
重心, 32
縮小ソリトン, 73
主 G 束, 186
主稜束, 187
準 κ 解, 150
消耗的, 49
垂直ベクトル, 188
水平空間ベクトル, 84
水平微分形式, 189
水平ベクトル, 188
水平持ち上げ, 188
正規化された方程式, 71
正規座標, 18
正規リッチフロー, 125

正則点, 51
成分表示, 189
接最小跡, 27
接錐, 65
接続, 188
接続形式, 189
漸近錐, 65
漸近ソリトン, 150
線形化方程式, 77
線分, 18
前方微分, 181
測地完備, 46
測地空間, 46
測地三角形, 43
測地線, 17
測地閉曲線, 31
素な多様体, 2
ソリトン, 72

タ行

第一ビアンキ恒等式, 192
第二ビアンキ恒等式, 191
単位接錐, 53
単射半径, 18
断面, 157
直線, 58
デターク・リッチフロー, 79
凸関数, 53, 183
凸測地球, 32

ハ行

葉巻型ソリトン, 73
ハミルトン・アイビーの定理, 105
半空間, 54, 58
半直線, 26

非圧縮的, 4
比較三角形, 43
標準 1-形式, 191
標準解, 70
標準近傍, 176
標準近傍定理, 167
標準垂直ベクトル場, 188
標準凸関数, 55
ブーズマン関数, 57
部分収束, 117
フレッシュ微分, 75
変分法, 16
変分法の基本原理, 18
放物型境界, 91
放物型近傍, 91
放物型スケーリング, 70
ホロノミー, 194
ホロノミー群, 194

マ行

モース関数, 48

ヤ行

ヤコビ場, 23
有界コンパクト, 65

ラ行

ラプラシアン, 194
リー微分, 190
リッチ曲率, 22
リッチ作用素, 22
リッチフロー, 69
リッチフローの（標準）主稜束, 83
リッチフローの標準接続, 84
連結と分解, 2

著者略歴

戸田 正人

とだ まさひと

1992 年 東京大学理学部数学科卒業
1994 年 東京大学大学院数理科学研究科博士前期課程修了
1996 年 東京大学大学院数理科学研究科博士後期課程修了 数理科学博士
1996 年 東京都立大学理学部助手
2000 年 お茶の水女子大学理学部数学科助教授
2007 年 お茶の水女子大学大学院准教授
現在に至る
専 門 3 次元位相幾何学，大域解析学，等

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ- 57

『3 次元トポロジーの新展開 リッチフローとポアンカレ予想』（電子版）

著 者 戸田 正人

2017 年 3 月 10 日 初版発行 ISBN 978-4-7819-9919-7

この電子書籍は 2007 年 7 月 25 日初版発行の同タイトルを底本としています。

数 理 科 学 編 集 部

発行人 森 平 敏 孝

TEL.(03)5474-8816

FAX.(03)5474-8817

ホームページ <http://www.saiensu.co.jp>

ご意見・ご要望は sk@saiensu.co.jp まで。

発行所 © 株式会社 サイエンス社

TEL.(03)5474-8500 (代表)

〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1-3-25

本誌の内容を無断で複写複製・転載することは、著作者および出版者の権利を侵害することがありますので、その場合にはあらかじめサイエンス社著作権担当者まで許諾をお求めください。

組版 イデア コラボレーションズ (株)