

SGC ライブラリ-106

# ホログラフィー原理と 量子エンタングルメント

高柳 匡 著

サイエンス社

# まえがき

本書は量子エンタングルメントという視点で、量子多体系の理論（場の理論）と重力理論（一般相対性理論や超弦理論）という一見全く異なった物理の理論体系を統一的に理解する新しい考え方を説明することを主目的としている。この考え方は、ホログラフィー原理と呼ばれ、特別な場合は AdS/CFT 対応ないしゲージ・重力対応とも呼ばれる。ホログラフィー原理の内容を誤解を恐れず一言でまとめると、「量子多体系の理論を時空の幾何学として表現する手法」と言える。場の理論は素粒子理論と物性理論の両分野にまたがる基本的で大変重要な道具であるが、ホログラフィー原理は理論物理学のほぼすべての分野の理論体系は実はその根源において同一であるという驚くべき関係性を強く示唆する。

ホログラフィー原理や AdS/CFT 対応は超弦理論の分野で発見された考え方であり、最近の超弦理論の研究において最もアクティブに研究されているテーマと言える。しかしながら、本書は読むのに超弦理論の知識は必要としないように書いたつもりである。本書で想定している読者は理論物理学を専門とする修士課程の大学院生程度であるが、場の理論の初歩と一般相対性理論の初歩を習得していれば、学部学生でも意欲があれば多くの部分を読みこなせるようになっている。

量子エンタングルメントは量子力学の基本的な性質であり、量子情報理論において極めて重要な役割を果たしてきた。その概念を定量化する量がエンタングルメント・エントロピーであり、本書で議論する最も重要な物理量である。この量を用いてホログラフィー原理を考察すると見通しが良くなり、多くの新しい知見が得られる。なぜならエンタングルメント・エントロピーは、「量子多体系の幾何学を記述する最も基本的な量」の一つといえるからである。本書の最終目標は、量子エンタングルメントの考え方をを用いて「ホログラフィー原理とは一体何なのか？」を理解することにある。一方で、エンタングルメント・エントロピーは複雑な量子多体系を数値的に解析する際に変換可能な量であり、基底状態がどのような量子相にあるか識別する量子的秩序パラメーターとして活用されている。つまり、「数値実験における観測量」という側面も持っているのである。

量子エンタングルメントやエンタングルメント・エントロピーというキーワードが、素粒子理論や物性物理・量子多体系の研究者に研究対象として興味を持たれ、世界中で活発にこれらの分野で研究されるようになってからまだ 10 年も経過していない。その意味でも量子エンタングルメントの考え方は、21 世紀の理論物理学を牽引する原動力となりえると筆者は期待している。

本書の内容は、以下の通りである。第 1 章で歴史的背景を説明した後で、第 2 章でエンタングルメント・エントロピーの定義や性質を説明する。第 3 章から第 4 章まで、場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーの計算法や具体例について述べる。第 5 章から第 6 章までにおいて、ホログラフィー原理や AdS/CFT 対応の解説を行う。そして第 7 章から第 10 章まで、ホログラフィー原理を用いたエンタングルメント・エントロピーの計算法や具体的計算、またその応用について説

明する。最後の第 11 章では、それまでの内容を総括するとともに、量子エンタングルメントを用いて重力理論の時空を記述する新しい考え方を紹介したい。

本書の全般的な内容に興味のある読者は、第 1 章から順に第 11 章まで順に読むことを基本的にお勧めする。時間が十分でないため、特に基本的で重要な部分だけをピックアップしたい読者には、[2.1–2.4 節], [3.1–3.3 節], [5.1–5.2 節], [6.1–6.4 節], [7.1–7.3 節] を読むことをお勧めする。また、場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーの計算のみに興味がある読者は、第 2 章から第 4 章までを読んで頂きたい。一方、エンタングルメント・エントロピーのホログラフィックな計算にのみ興味がある読者は、第 5 章から第 11 章までを読んで頂ければよいように書かれている。

本書の第 7 章以降の多くの部分が筆者自身も関わった研究をもとにしており、また筆者が国内の集中講義（立教大・東北大・京大基礎物理学研究所・東京工業大・北海道大など）や海外のスクール（CERN 冬の学校・Arnold Sommerfeld スクール・アジア冬の学校など）で行ってきた講義の経験を加味して書かせて頂いている。まず、ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの計算法を共同で開発させて頂いた笠真生氏には心よりお礼を申し上げたい。さらに関連研究の共同研究者である、畔柳竜生氏、Jyotirmoy Bhattacharya 氏、初田泰之氏、Matthew Headrick 氏、平田朋義氏、Veronika Hubeny 氏、藤田充俊氏、Andreas Karch 氏、李微氏、Ali Mollabashi 氏、K. Narayan 氏、西岡辰磨氏、野崎雅弘氏、沼澤宙朗氏、小川軌明氏、Andrea Prudenziati 氏、Mukund Rangamani 氏、芝暢郎氏、Ethan Thompson 氏、Erik Tonni 氏、Sandip Trivedi 氏、宇賀神知紀氏の各氏に深く感謝したい。また作成中の原稿における多数の誤植やミスを指摘して頂いた京都大学の大学院生である岡崎智久氏、佐藤芳紀氏、渡邊賢人氏には非常に感謝している。最後に、本書に関して多数の助言を頂き、また辛抱強く原稿の完成を激励しながら見守っていただいたサイエンス社の平勢耕介氏に心から感謝の意を表したい。

2013 年 12 月 京都大学にて

高柳 匡

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>はじめに：歴史的背景から最近の流れまで</b>	<b>1</b>
1.1	歴史的動機：ブラックホールのエントロピー	1
1.2	ブラックホールとエンタングルメント・エントロピー	2
1.3	ブラックホールのエントロピーの微視的導出から AdS/CFT 対応へ	4
1.4	新旧のアイデアの融合：重力のエントロピーとエンタングルメント・エントロピー	5
1.5	物性物理とエンタングルメント・エントロピー	5
<b>第 2 章</b>	<b>エンタングルメント・エントロピーの基礎</b>	<b>7</b>
2.1	量子力学における密度行列とエントロピー	7
2.2	エンタングルメント・エントロピーの定義	8
2.3	情報のエントロピーとしての解釈	11
2.4	エンタングルメント・エントロピーの基本的性質	13
2.5	エンタングルメント・エントロピーの計算例：調和振動子の対	14
<b>第 3 章</b>	<b>場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーの計算</b>	<b>16</b>
3.1	場の理論のエンタングルメント・エントロピーとレプリカ法	16
3.2	エンタングルメント・エントロピーの計算の簡単な例	20
3.3	量子多体系のエンタングルメント・エントロピーの面積則	22
3.4	エンタングルメント・エントロピーと量子相転移	24
<b>第 4 章</b>	<b>共形場理論のエンタングルメント・エントロピー</b>	<b>27</b>
4.1	共形変換と共形場理論	27
4.2	2次元共形場理論	33
4.3	2次元無質量自由場理論におけるエンタングルメント・エントロピー	37
4.4	2次元共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピーの一般論	40
4.5	有限温度・有限サイズの2次元共形場理論のエンタングルメント・エントロピー	43
4.6	2次元共形場理論における $c$ 定理とエンタングルメント・エントロピー	48
4.7	高次元共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピー	50
4.8	偶数次元共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピー	52
4.9	奇数次元共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピー	56
4.10	トポロジカルな量子系のエッジ・バルク対応	58

<b>第 5 章</b>	<b>ブラックホールとホログラフィー原理</b>	<b>60</b>
5.1	ブラックホールと熱力学 . . . . .	60
5.2	ブラックホールからホログラフィー原理へ . . . . .	62
5.3	リンダラー時空と量子エンタングルメント . . . . .	63
<b>第 6 章</b>	<b>AdS/CFT 対応</b>	<b>66</b>
6.1	AdS 時空 . . . . .	66
6.2	AdS/CFT 対応とは . . . . .	68
6.3	超弦理論からの AdS/CFT 対応の導出 . . . . .	69
6.4	AdS/CFT 対応の基本原則：バルク／境界関係 . . . . .	71
6.5	2 点関数の計算 . . . . .	73
6.6	AdS/CFT 対応とブラックホール . . . . .	76
6.7	ホログラフィックなエネルギー運動量テンソル . . . . .	79
<b>第 7 章</b>	<b>ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの基礎</b>	<b>81</b>
7.1	ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー . . . . .	81
7.1.1	ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの公式 . . . . .	82
7.1.2	面積則のホログラフィックな導出 . . . . .	83
7.2	2 次元共形場理論のエンタングルメント・エントロピー . . . . .	83
7.2.1	無限に伸びた空間におけるエンタングルメント・エントロピー . . . . .	84
7.2.2	円周上のエンタングルメント・エントロピー . . . . .	85
7.2.3	ギャップがある系の場合 . . . . .	86
7.3	高次元共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピー . . . . .	87
7.3.1	部分系 $A$ が帯状の場合 . . . . .	87
7.3.2	部分系 $A$ が球状の場合 . . . . .	88
7.3.3	具体例：4 次元ゲージ理論 . . . . .	90
7.4	強劣加法性の導出 . . . . .	92
7.5	部分系 $A$ が非連結な多様体の場合 . . . . .	94
7.6	ブラックホールのエントロピーとしての計算法 . . . . .	95
7.7	ホログラフィックな公式の導出 . . . . .	98
7.7.1	$n$ が自然数の場合 . . . . .	99
7.7.2	一般の $n$ への解析接続 . . . . .	101
7.7.3	エンタングルメント・エントロピーの計算 . . . . .	102
<b>第 8 章</b>	<b>ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの一般化</b>	<b>104</b>
8.1	時間に依存する背景におけるホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー	104
8.2	高階微分の補正 . . . . .	105
8.3	量子重力効果の補正 . . . . .	106

8.3.1	量子補正の一般論	107
8.3.2	非連結な部分系への応用	108
<b>第 9 章</b>	<b>有限温度系・熱化現象へのホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの 応用</b>	<b>110</b>
9.1	有限温度系とブラックホール	110
9.2	回転する BTZ ブラックホールの場合	112
9.3	AdS ブラックホールと量子エンタングルメント	114
9.4	熱化現象	116
9.4.1	量子クエンチの共形場理論を用いた解析	117
9.4.2	境界状態の解析	122
9.4.3	ホログラフィックな計算	124
9.5	励起状態におけるエンタングルメント・エントロピー	128
9.5.1	AdS/CFT 対応を用いた摂動論	129
9.5.2	相対エントロピーを用いた一般論	132
9.6	局所的な励起状態と AdS/CFT 対応	133
9.6.1	AdS/CFT 対応を用いた局所量子クエンチの記述	134
9.6.2	エネルギー運動量テンソル	136
9.6.3	エンタングルメント・エントロピー	137
9.6.4	部分系 $A$ の中心が励起される場合	138
9.6.5	一般的な部分系 $A$ の場合	141
<b>第 10 章</b>	<b>強結合量子系への応用</b>	<b>144</b>
10.1	閉じ込め・非閉じ込め相転移	144
10.2	エンタングルメント・エントロピーとフェルミ面の物理	148
10.2.1	フェルミ面が存在する場合のエンタングルメント・エントロピー	149
10.2.2	ホログラフィックな解析の一般論	151
10.2.3	具体的な模型	156
10.2.4	ハイパースケーリングの破れ	159
<b>第 11 章</b>	<b>おわりに：量子エンタングルメントから量子重力理論の再構築へ</b>	<b>160</b>
11.1	量子エンタングルメントと重力理論における時空の構造	160
11.2	エンタングルメント繰りこみと AdS/CFT 対応	161
	<b>参考文献</b>	<b>165</b>
	<b>索引</b>	<b>174</b>

# 第 1 章

## はじめに：歴史的背景から最近の流れまで

本書のはじめとして、ここでは何故エンタングルメント・エントロピー という量が理論物理学において興味をもたれるようになってきたのか説明したい。以下で説明するように、ブラックホールのエントロピーを動機を中心として、様々な歴史的な発展が交差や合流を繰り返してきた。そのせいで、流れは少々入り組んでいるが、理論物理学の発展の現実を伝えるために、歴史的な経緯を尊重して説明したいと思う。

### 1.1 歴史的動機：ブラックホールのエントロピー

現代の物理学において、量子力学（量子論）はミクロなスケールを記述するための唯一の基礎理論である。当然ながら物質の最小単位の解明を目指す素粒子理論においても最も根源的な原理であり、場の理論と呼ばれる多体系の量子力学を用いて素粒子理論を構成してきた。この考え方で、現実世界に存在する4つの力のうち電磁気力、強い相互作用、そして弱い相互作用を統一的に理解することができ、この基礎理論がいわゆる「標準模型」である。しかしながら、4つ目の力である重力（万有引力）は、我々の宇宙の形成や惑星の運動などを理解する上で欠かせない極めて重要な相互作用であるにもかかわらず、量子論との相性を考えるとやっかいな問題が歴史的にいくつも起ってきたのである。しかしながら物理学の進歩においては、そのような問題を解決しようとして大きなブレークスルーが生まれるのが常である。

まず、マクロなスケールの重力理論を完全に記述すると考えられている一般相対性理論を通常的手法で量子化すると、高エネルギー領域の量子揺らぎによって起こる発散（紫外発散と呼ばれる）が頻繁に生じるために、量子論として大きな困難が生じる。相対性理論において長さのスケールとエネルギーのスケールは逆比例する。従って、発散が生じる理由は物質の最小単位を粒子と考えているため、その大きさがゼロであることに起因していると思われる。そこで、

## 第 2 章

# エンタングルメント・エントロピーの基礎

本章では、本書の中心テーマとなる量子エンタングルメントとその強さを見積もるエンタングルメント・エントロピーの定義や性質に関して説明したい<sup>[4]</sup>。仮定する知識は、量子力学と統計力学の基礎だけとし、密度行列を用いた記述を復習することからスタートして解説していきたい。

### 2.1 量子力学における密度行列とエントロピー

量子力学において、物理的状態は波動関数  $\Psi$  で指定され、系全体に相当するヒルベルト空間  $\mathcal{H}_{tot}$  に属すベクトル  $|\Psi\rangle$  として記述される。ハミルトニアンがエルミート演算子  $H$  で与えられる系の時間発展はシュレディンガー方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle, \quad (2.1)$$

で記述される。

物理量は、そのヒルベルト空間に作用するエルミート演算子 ( $O$  と書く) として表され、ある状態における物理量はその期待値で与えられる：

$$\langle O \rangle = \langle \Psi | O | \Psi \rangle. \quad (2.2)$$

ここで、波動関数ベクトルは、 $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$  と正規化している。

このように波動関数で与えられる状態を純粋状態 (pure state) と呼ぶ。しかし現実には、ある物理系の一部分 (部分系) に着目して量子論を構成する方が便利なことも多い。例えば、熱浴と接している有限温度の系では、熱浴部分は無視するので、ある統計平均として与えられる状態を考える必要がある。そのようなものを一般に混合状態と呼ぶ。混合状態は密度行列  $\rho_{tot}$  で記述され ( $tot$  は全体の系を意味し、後で便利のように付けている)、物理量は

$$\langle O \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{tot}} [O \cdot \rho_{tot}], \quad (2.3)$$



## 第 3 章

# 場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーの計算

本章ではまず、場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーを計算する一般的な方法であるレプリカ法を解説する。その後で、面積則という重要な性質や簡単な具体例を説明する。また物性物理への応用を念頭に置いて、量子相転移とエンタングルメント・エントロピーの関係にも触れる。

### 3.1 場の理論のエンタングルメント・エントロピーとレプリカ法

まず、本書の主なテーマである場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーの定義を説明したい。量子多体系におけるエンタングルメント・エントロピーの定義は既に説明したとおりである。例えば多数のスピンから構成される格子系であれば、格子全体の空間的領域を  $A$  と  $B$  に分けて、それぞれに属すスピンのヒルベルト空間を  $\mathcal{H}_A$  と  $\mathcal{H}_B$  とすることによってエンタングルメント・エントロピー  $S_A$  が定義される。場の理論は、通常このような量子多体系の連続極限（格子間隔  $\epsilon$  をゼロにする極限）とみなせるので、時間一定面の空間を  $A$  と  $B$  に分けることで自然に定義される（図 2.1 の下図参照）。

$d+1$  次元における質量  $m$  の実自由スカラー場理論を考えると次の作用で表される\*1)。

$$S = \int dt d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d (\partial_i \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right]. \quad (3.1)$$

このスカラー場理論の  $d$  次元の空間方向を正方格子状に離散化することを考えてみよう。スカラー場の空間微分を

---

\*1) 本書では素粒子論の慣習に従って、空間  $d$  次元と時間が 1 次元ある時空上の場の理論を  $d+1$  次元の場の理論と呼ぶ。物性物理では、 $d$  次元量子多体系というと空間が  $d$  次元という意味であり、その連続極限は  $d+1$  次元の場の理論で記述されることに注意されたい。

## 第 4 章

# 共形場理論のエンタングルメント・エントロピー

本章では、場の理論の中でも特に共形場理論と呼ばれるクラスの理論におけるエンタングルメント・エントロピーの計算を紹介する。共形場理論の基礎的説明から始めて、まず 2 次元共形場理論の場合の解析を詳しく述べる<sup>[22]</sup>。その後で、高次元の共形場理論の場合に知られている結果をまとめる。共形場理論の知識のある読者は、4.3 節から読み始めてかまわない。

### 4.1 共形変換と共形場理論

共形変換 (conformal transformation) とは、時空の計量がスケール倍を除いて保たれる (言い換えると角度を保つ) 座標変換のことである。良く知られているように、一般に座標変換  $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x)$  のもとで、計量は

$$g'_{\mu\nu}(x') = \left( \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \right) \left( \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \right) g_{\alpha\beta}(x), \quad (4.1)$$

と変換する。この変換が特に、

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (4.2)$$

の形になる場合が共形変換である。この共形変換全体がなす群を共形群 (conformal group) と呼ぶ。共形変換で不変な場の理論を共形場理論 (conformal field theory, 略して CFT) と呼ぶ<sup>[30],[31]</sup>。

もともとの時空が  $d + 1$  次元ミンコフスキー (Minkowski) 時空である場合

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, d), \quad (4.3)$$

が最も重要であるので以下ではこの場合に限定する。微小変換

## 第 5 章

# ブラックホールとホログラフィー原理

本章では、ブラックホールの熱力学からはじめて、ホログラフィー原理の発見に至った経緯を概説したい。ホログラフィー原理は、次の章からのメインテーマである AdS/CFT 対応をその特別な場合として含む、大変幅広い考え方である。

### 5.1 ブラックホールと熱力学

一般相対性理論が記述する 4 次元 (=3+1 次元) 時空の重力理論を考えよう。ある領域内に物質をどんどん球対称に詰めてゆくと (全質量を  $M$  とする)、その半径がシュワルツシルド半径

$$r_H = 2G_N M, \quad (G_N \text{ は重力定数}) \quad (5.1)$$

より小さくなると ( $r = r_H$  を事象の地平線という)、重力崩壊と呼ばれる現象を起こし、

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_H}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (5.2)$$

の計量で与えられるシュワルツシルド・ブラックホールになる ( $d\Omega^2$  は 2 次元球面の極座標)。さらに物質を放り込んでもブラックホールの半径が増えるだけなので、半径  $r$  内に許される物体の最大質量は  $\frac{r}{2G_N}$  であることが分かる。

重い物体がいったんブラックホールに崩壊してしまうと、とても強い重力場を作るため、物質や光はその内部から外に出てくることは不可能になることが一般相対論からすぐに分かる。しかしながらホーキングは、量子効果を取り入れるとブラックホールはある温度  $T_H$  の黒体とみなせ、実際には放射光が外に出てくることを示した (ホーキング放射と呼ばれる)<sup>[2]</sup>。

この温度  $T_H$  を計算するには、まず地平線近傍で計量が

## 第 6 章

# AdS/CFT 対応

ホログラフィー原理が成り立つ例の代表格が AdS/CFT 対応である。AdS/CFT は超弦理論における D ブレインの考察に基づいて 1997 年にマルダセナによって発見された<sup>[55]</sup>。この対応は、一言でまとめると「 $d+2$  次元の反ドジッター時空 (AdS 時空) 上の量子重力理論は、 $d+1$  次元の共形場理論 (CFT) と等価である」という主張になる。本章では AdS/CFT 対応の基礎について手短かに説明するが、この先を読み進む上で最低限必要な知識はすべて得られるように書かれている。本書は超弦理論の予備知識がない読者を対象に書かれているが、AdS/CFT 対応をより深く学ぶには超弦理論やその低エネルギー近似である超重力理論の基礎的理解も必要であり、そのためには他の解説 (例えば文献 [57], [58]) をあたられたい。

### 6.1 AdS 時空

$d+2$  次元の反ドジッター時空 (Anti de-Sitter space) は、時間が 2 つある  $d+3$  次元時空  $\mathbf{R}^{2,d+1}$

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_{d+2}^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{d+1}^2, \quad (6.1)$$

内の超曲面

$$X_0^2 + X_{d+2}^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{d+1}^2 + R^2, \quad (6.2)$$

として定義される。この時空を略して  $\text{AdS}_{d+2}$  と書くことにする。ここで、定数  $R$  は、半径 (時空の大きさ) を表す。時間方向をユークリッド化すると、双曲面  $\mathbf{H}_{d+2}$  になる。

式 (6.2) の拘束条件を解くために以下のように  $\text{AdS}_{d+2}$  の座標を導入する：

## 第 7 章

# ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの基礎

さて本章では、エンタングルメント・エントロピーの AdS/CFT 対応を用いたホログラフィックな計算<sup>[6]</sup>を紹介する。まず初めにその計算公式を説明し、具体例における計算を行う。その後でどうしてそのような公式で計算できるのか、計算公式を AdS/CFT 対応の原理から導出する<sup>[64]</sup>。

### 7.1 ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー

これまで説明したように、AdS/CFT 対応によると、 $d+2$ 次元 AdS 時空における重力理論は、その境界に定義された  $d+1$ 次元共形場理論と等価な理論となる。この対応は、ホログラフィー原理の特別な場合に相当する。従って、より一般のホログラフィー原理を理解する上でも AdS/CFT 対応の基本的な成り立ちをより深く理解することは重要である。

そのような基本的な問いの一つが、AdS/CFT 対応において「共形場理論の時刻  $t$  における、ある空間領域  $A$  の情報が AdS 時空の重力理論のどの領域に記録されているのか?」という疑問である。領域  $A$  に制限した情報は、 $A$  に制限された密度行列  $\rho_A$  で表される。従って、領域  $A$  の情報量を、エンタングルメント・エントロピー  $S_A = -\text{Tr}[\rho_A \log \rho_A]$  として表すことができる。

このように考えて、先ほど挙げた問題を定量的に扱えるように言い直すと、「共形場理論の領域  $A$  に対する時刻  $t$  のエンタングルメント・エントロピー  $S_A$  は、AdS 時空の重力理論でどのように計算できるのか?」という問題になる。本書の大部分で仮定しているように、重力理論を古典的に取り扱うことができる場合（古典重力近似）を考える。また、本章では簡単のため、考えている漸近的に AdS な時空が時間に依存しない場合を考える。時間に依存する背景におけるエンタングルメント・エントロピーの計算法は、次章で扱う。

## 第 8 章

# ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの一般化

本章では、前章で説明したホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーをより一般的な状況に適用できるように拡張する。時間に依存する背景への拡張、高階微分の補正を取り入れた場合、そして量子補正を取り入れる場合について概説する。

### 8.1 時間に依存する背景におけるホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー

前章では、「重力理論の時空が時間に依存しない場合」、もしくは「ユークリッド空間にウィック回転できる時空の場合」に関してホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの計算を説明したが、そうではない時空に対してはどうすればよいのであろうか？ 時空が時間に依存しない場合（静的な場合）には、時間一定面をただ1つ選ぶことができ、その中で最小面積を考えることができた。しかし、時間に依存する時空に対しては時間一定面の選び方は無数あり、どのように定義してよいかあいまいになる。また、時空全体をユークリッド化すると、計量が一般には実数にならないという問題も生じる。いずれにせよ、(7.1)の公式そのままでは、時間に依存する時空には適用できないのである。では、一般の漸近的 AdS な時空を考えた場合には、どのように  $S_A$  を計算することができるのだろうか。答えを言うと、面積を最小にすることを要求するのではなく、微小変分しても面積が変わらないというより弱い条件

$$\delta[\gamma_A \text{の面積}] = 0, \quad (8.1)$$

を課して定義される曲面を  $\gamma_A$  と定義すればよい。このような曲面は、**極値曲面 (extremal surface)** と呼ばれる。このように偏微分方程式の解として定義されるので、場合によっては複数の極値曲面が見つかる場合がある。その場合は、面積が最小になる曲面を選ぶことにする。このルールで  $\gamma_A$  を求め、(7.1)

## 第 9 章

# 有限温度系・熱化現象へのホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの応用

本章では、ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの応用として、有限温度の系や物質を大きく励起したときに起こる熱化現象の解析を紹介する。これらの系では基本的にブラックホールの存在が重要な役割を果たし、エンタングルメント・エントロピーの計算がブラックホール時空でどのように行われるのか説明したい。また、励起状態に対するエンタングルメント・エントロピーがどのように振る舞うのか解説したい。

### 9.1 有限温度系とブラックホール

まず、有限温度系におけるエンタングルメント・エントロピーについて AdS/CFT 対応を用いた解析について説明する。簡単のため、すべて解析的に計算が実行できる AdS<sub>3</sub>/CFT<sub>2</sub> の場合を解説する。より高次元の場合に拡張することは本質的に同様であり、物理的な解釈も類似しているので省略する。

有限温度で空間方向が無限に伸びている 1 + 1 次元共形場理論は、6.6 節で説明したように AdS ブラックホール解に対応する。特に 3 次元の AdS ブラックホールは、**BTZ** ブラックホールと呼ばれる<sup>[80]</sup>。その計量は、(6.35)において  $d = 1$  と置けば得られる。

次のように 2 回ウィック回転をする座標変換：

$$z = \frac{z_H}{\cosh \rho}, \quad t = iz_H \theta, \quad x_1 = iz_H \tau \quad (9.1)$$

によって、(6.35) の計量は、大域的な AdS<sub>3</sub> の計量 (7.9) に帰着する。このようにブラックホール解が、AdS 時空の計量に座標変換で一致する理由は、3 次元の負の宇宙定数を持つ（計量の他に物質場を含まない）重力理論のアイنشタイン方程式の解はかならず局所的に AdS<sub>3</sub> の計量で与えられるという有名な事実があるからである。

# 第 10 章

## 強結合量子系への応用

この章では、ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーを実際の物理系にどのように応用するのか具体例をいくつか説明したい。特に、ゲージ理論の閉じ込め・非閉じ込め相転移や金属のようにフェルミ面を持つ物質の AdS/CFT 対応を用いた解析について述べたい。AdS/CFT 対応の古典重力近似を用いるので、どちらの場合も量子系の強結合極限に相当する。

### 10.1 閉じ込め・非閉じ込め相転移

以前に 3.4 節でも触れたように、エンタングルメント・エントロピーは量子多体系の相構造における秩序変数（オーダーパラメーター）として機能する。AdS/CFT 対応の記述するゲージ理論において、最も基本的な相転移の一つとしては、閉じ込め・非閉じ込めの相転移が挙げられる。例えば、QCD のようなヤン・ミルズ・ゲージ理論（非可換ゲージ理論）では、ゲージ理論の相互作用（強い相互作用）のために、グルーオンやクォークといったカラー電荷をもった粒子が強く引き付けられ、全体として電荷がゼロの束縛状態（メソンやバリオン）を作る。このようにカラー電荷を帯びた粒子を単体で取り出せない状況を閉じ込めと呼ぶ。しかしながら、温度を高くして、十分高いエネルギーを与えると、束縛状態をバラバラにして、単体の粒子が自由に動き回れるようになる。このとき閉じ込めから解放された状態（非閉じ込め）と言う。この相転移が、閉じ込め・非閉じ込めの相転移である。

通常は、温度を変えながら何らかの物理量、例えばクォーク間の引力の強さを表すウィルソン・ループの期待値を計算することで相転移を判定する。しかしながら、エンタングルメント・エントロピーに着目した場合は、部分系の大きさ  $l$  を有効的な温度と解釈できるので、絶対零度の状態（波動関数）だけの情報から、 $l$  を変えることで相転移現象を解析することができる。以下では、このような計算を AdS/CFT 対応を用いて行う手法を解説したい<sup>[24],[95]</sup>。



## 第 11 章

# おわりに：量子エンタングルメントから量子重力理論の再構築へ

この本書最後の章ではこれまでの内容を総括し、今後の展望について述べたい。量子エンタングルメントのホログラフィー原理に基づく解析を思い出すと、重力理論の時空はミクロなエンタングルメントの集合体とみなせることが示唆される。このアイデアを実現する一つの可能性が、テンソルネットワークと呼ばれる量子多体系の波動関数の記述であり、その中で特に「エンタングルメント繰りこみと呼ばれる枠組みと AdS/CFT 対応が実は等価である」という予想がなされている。そこでこれらの現在発展しつつある重力理論に対する新しい考え方を簡単に紹介して筆をおくことにしたい。

### 11.1 量子エンタングルメントと重力理論における時空の構造

これまでに本書では、量子多体系における量子エンタングルメントの解説を主目的として、その定量的な測度であるエンタングルメント・エントロピーの性質と計算法を解説してきた。エンタングルメント・エントロピーは、どのような量子多体系においても定義できる普遍的な物理量であり、系の自由度や相関を表す重要な量である。場の理論においてしばしば計算の対象となる相関関数は、時空の点を複数指定してそれらの間の局所的な相関を測る量であり、系が純粋状態なのか混合状態なのかという大域的な量子相関に関する識別を行うことはできない。一方、エンタングルメント・エントロピーには非局所的な情報も含まれ、量子状態のトポロジーという大域的な情報も解析することができる。

エンタングルメント・エントロピーの計算法には大きく分けて 2 種類あり、一つが場の理論の手法を用いる方法であり、もう一つが AdS/CFT 対応にもとづくホログラフィックな計算法である。特に後者においては、本来は量子論的に定義されたエンタングルメント・エントロピーを、曲がった時空における極小面積という微分幾何学的な量として計算することができる。このように AdS/CFT 対応は量子多体系の量子論的量を、重力理論の古典的量に結びつけるという画

## 参考文献

- [1] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy”, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
- [2] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes”, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [3] ブラックホールの熱力学に関しては、例えば次の教科書を参照のこと。R. M. Wald, “*General Relativity*”, University of Chicago Press, 1984.  
原論文は、以下のとおり。S. W. Hawking, “Black Holes and Thermodynamics”, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 191.  
G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity”, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2752.
- [4] エンタングルメント・エントロピーやシャノンのエントロピーに関する日本語の本格的な教科書として、梅垣寿春・大矢雅則, 『確率論的エントロピー』, 『量子論的エントロピー』, 共立出版.
- [5] 日本語の短い解説として、高柳匡・笠真生, “エンタングルメント・エントロピーのホログラフィーを用いた幾何学的記述”, 日本物理学会誌 **64** (2007) 421.
- [6] 量子情報理論の世界的にスタンダードな教科書として, M. Nielsen and I. Chuang, “*Quantum Computation and Quantum Information*”, Cambridge University Press.
- [7] 林正人, 『量子情報理論入門』, サイエンス社, SGC ライブラリ 32, 臨時別冊・数理科学 2004 年 5 月.
- [8] 堀田昌寛, 『量子情報と時空の物理』, サイエンス社, SGC ライブラリ 103, 臨時別冊・数理科学 2014 年 1 月.
- [9] 原論文は、以下のとおり。L. Bombelli, R. K. Koul, J. H. Lee and R. D. Sorkin, “A Quantum Source Of Entropy For Black Holes”, *Phys. Rev. D* **34**, 373 (1986).  
M. Srednicki, “Entropy and area”, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 666 (1993) [arXiv:hep-th/9303048].  
これと類似したアイデア（ブリックウォールの方法と呼ばれる）は、すでにトーフトが以下の論文で議論している。G. 't Hooft, “On the Quantum Structure of a Black Hole”, *Nucl. Phys. B* **256** (1985) 727.
- [10] L. Susskind and J. Uglum, “String physics and black holes”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **45B** (1996) 115 [hep-th/9511227].
- [11] この話題の最新のレビューとして, S. N. Solodukhin, “Entanglement entropy of black holes”, *Living Rev. Rel.* **14** (2011) 8 [arXiv:1104.3712 [hep-th]].
- [12] 日本語の解説としては、高柳匡, “ホログラフィック理論とは何か?”, 数理科学 2007 年 12 月号 50 頁, サイエンス社.  
英語のスタンダードなレビューとしては, D. Bigatti and L. Susskind, “TASI lectures on

the holographic principle”, [arXiv:hep-th/0002044].

原論文は, G. 't Hooft, “Dimensional reduction in quantum gravity”, [arXiv:gr-qc/9310026]; L. Susskind, “The World as a hologram”, *J. Math. Phys.* **36**, 6377 (1995) [arXiv:hep-th/9409089].

- [13] 原論文は, J. Polchinski, “Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges”, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724 [hep-th/9510017].

超弦理論のスタンダードな教科書: J. Polchinski, “*String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*”, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 531 p に詳しい解説がある.

- [14] A. Strominger and C. Vafa, “Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy”, *Phys. Lett. B* **379** (1996) 99 [hep-th/9601029].

- [15] 日本語の解説は, 高柳匡, “量子重力と共形場理論”, 別冊・数理科学 2009年9月号, 『量子重力理論—広がる多彩な最前線』, サイエンス社.

英語のスタンダードなレビューは, O. Aharony et.al., *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111] を参照.

原論文は, J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) [arXiv:hep-th/9711200].

- [16] 原論文は, S. Ryu and T. Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006) [arXiv:hep-th/0603001]; *JHEP* **0608**, 045 (2006) [arXiv:hep-th/0605073].

英語で書かれた専門的レビューとして, T. Nishioka, S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic Entanglement Entropy: An Overview”, *J. Phys. A* **42** (2009) 504008.

T. Takayanagi, “Entanglement Entropy from a Holographic Viewpoint”, *Class. Quant. Grav.* **29** (2012) 153001 [arXiv:1204.2450 [gr-qc]].

- [17] トポロジカル秩序の良い教科書は, X. G. Wen, “*Quantum Field Theory of Many-Body Systems*”, Oxford University Press, (2004).

- [18] A. Kitaev and J. Preskill, “Topological entanglement entropy”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 110404 (2006) [arXiv:hep-th/0510092].

M. Levin and X. G. Wen, “Detecting topological order in a ground state wave function”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 110405 (2006) [arXiv:cond-mat/0510613].

- [19] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, “Quantum entanglement”, *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 865 [quant-ph/0702225].

- [20] E. H. Lieb and M. B. Ruskai, “A fundamental property of quantum-mechanical entropy”, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 434–436; “Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy”, *J. Math. Phys.* **14** (1973) 1938–1941. With an appendix by B. Simon.

- [21] P. Calabrese and J. Cardy, “Entanglement entropy and quantum field theory”, *J. Stat. Mech.* **0406**, P002 (2004) [arXiv:hep-th/0405152].

- [22] 2次元共形場理論のエンタングルメントエントロピーの計算に関する専門的なレビューは, P. Calabrese and J. Cardy, “Entanglement entropy and conformal field theory”, *J. Phys.*

- A* **42** (2009) 504005 [arXiv:0905.4013 [cond-mat.stat-mech]].
- [23] 自由場理論のエンタングルメントエントロピーの計算に関する専門的なレビューは, H. Casini and M. Huerta, “Entanglement entropy in free quantum field theory”, *J. Phys. A* **42** (2009) 504007 [arXiv:0905.2562 [hep-th]].
- [24] T. Nishioka and T. Takayanagi, “AdS Bubbles, Entropy and Closed String Tachyons”, *JHEP* **0701** (2007) 090 [hep-th/0611035].
- [25] J. Eisert, M. Cramer and M. B. Plenio, “Area laws for the entanglement entropy — a review”, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 277 [arXiv:0808.3773 [quant-ph]].
- [26] J. I. Latorre, A. Riera, “A short review on entanglement in quantum spin systems”, *J. Phys. A* **42** (2009) 504002 [arXiv:0906.1499 [hep-th]].
- [27] D. N. Page, “Average entropy of a subsystem”, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1291 [gr-qc/9305007].
- [28] N. Shiba and T. Takayanagi, “Volume Law for the Entanglement Entropy in Non-local QFTs”, arXiv:1311.1643 [hep-th].  
J. L. Karczmarek and P. Sabella-Garnier, “Entanglement entropy on the fuzzy sphere”, arXiv:1310.8345 [hep-th].
- [29] 量子ホール系で初めてこのようなスペクトラムを初めて計算した論文は, S. Ryu, Y. Hatsugai, “Entanglement entropy and the Berry phase in solid states”, *Phys. Rev. B* **73** (2006) 245115, [cond-mat/0601237].  
このようなスペクトラムにエンタングルメント・スペクトラムという名前を与え, 相互作用する量子ホール系で計算した論文は, H. Li and F. D. M. Haldane, “Entanglement Spectrum as a Generalization of Entanglement Entropy: Identification of Topological Order in Non-Abelian Fractional Quantum Hall Effect States”, *Phys. Rev. Lett.* **101**(2008)010504, arXiv:0805.0332.
- [30] 伊藤克司, 「共形場理論」, サイエンス社, SGC ライブラリ 83, 臨時別冊・数理科学 2011 年 6 月.
- [31] P. Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, “*Conformal Field Theory*”, Springer.
- [32] J. Polchinski, “Scale And Conformal Invariance In Quantum Field Theory”, *Nucl. Phys. B* **303** (1988) 226.
- [33] Y. Nakayama, “A lecture note on scale invariance vs conformal invariance”, arXiv:1302.0884 [hep-th].
- [34] C. Holzhey, F. Larsen and F. Wilczek, “Geometric and renormalized entropy in conformal field theory”, *Nucl. Phys. B* **424**, 443 (1994) [arXiv:hep-th/9403108].
- [35] T. Azeyanagi, T. Nishioka and T. Takayanagi, “Near Extremal Black Hole Entropy as Entanglement Entropy via AdS(2)/CFT(1)”, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 064005 [arXiv:0710.2956 [hep-th]].
- [36] S. Furukawa, V. Pasquier, J. Shiraishi, “Mutual Information and Boson Radius in  $c=1$  Critical Systems in One Dimension”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 170602 (2009),

[arXiv:0809.5113].

- P. Calabrese, J. Cardy and E. Tonni, “Entanglement entropy of two disjoint intervals in conformal field theory”, *J. Stat. Mech.* **0911** (2009) P11001 [arXiv:0905.2069 [hep-th]].
- [37] M. Headrick, “Entanglement Renyi entropies in holographic theories”, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 126010 [arXiv:1006.0047 [hep-th]].
- [38] A. B. Zamolodchikov, “Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory”, *JETP Lett.* **43** (1986) 730 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **43** (1986) 565].
- [39] H. Casini and M. Huerta, “A Finite entanglement entropy and the c-theorem”, *Phys. Lett. B* **600** (2004) 142 [hep-th/0405111].
- [40] H. Casini and M. Huerta, “Universal terms for the entanglement entropy in 2+1 dimensions”, *Nucl. Phys. B* **764** (2007) 183 [hep-th/0606256].
- [41] T. Hirata and T. Takayanagi, “AdS/CFT and strong subadditivity of entanglement entropy”, *JHEP* **0702** (2007) 042 [hep-th/0608213].
- [42] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement and alpha entropies for a massive scalar field in two dimensions”, *J. Stat. Mech.* **0512**(2005)12012 [cond-mat/0511014].
- [43] D. V. Fursaev and S. N. Solodukhin, “On the description of the Riemannian geometry in the presence of conical defects”, *Phys. Rev. D* **52** (1995) 2133 [hep-th/9501127].
- [44] J. L. Cardy, “Is There a c Theorem in Four-Dimensions?”, *Phys. Lett. B* **215** (1988) 749.
- [45] Z. Komargodski and A. Schwimmer, “On Renormalization Group Flows in Four Dimensions”, *JHEP* **1112** (2011) 099 [arXiv:1107.3987 [hep-th]].
- [46] S. N. Solodukhin, “Entanglement entropy, conformal invariance and extrinsic geometry”, *Phys. Lett. B* **665** (2008) 305 [arXiv:0802.3117 [hep-th]].
- [47] L. -Y. Hung, R. C. Myers and M. Smolkin, “On Holographic Entanglement Entropy and Higher Curvature Gravity”, *JHEP* **1104** (2011) 025 [arXiv:1101.5813 [hep-th]].
- [48] H. Casini, M. Huerta and R. C. Myers, “Towards a derivation of holographic entanglement entropy”, *JHEP* **1105** (2011) 036 [arXiv:1102.0440 [hep-th]].
- [49] D. L. Jafferis, I. R. Klebanov, S. S. Pufu and B. R. Safdi, “Towards the F-Theorem: N=2 Field Theories on the Three-Sphere”, *JHEP* **1106** (2011) 102 [arXiv:1103.1181 [hep-th]].  
I. R. Klebanov, S. S. Pufu and B. R. Safdi, “F-Theorem without Supersymmetry”, *JHEP* **1110** (2011) 038 [arXiv:1105.4598 [hep-th]].
- [50] H. Liu and M. Mezei, “A Refinement of entanglement entropy and the number of degrees of freedom”, arXiv:1202.2070 [hep-th].
- [51] H. Casini and M. Huerta, “On the RG running of the entanglement entropy of a circle”, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 125016 [arXiv:1202.5650 [hep-th]].
- [52] I. R. Klebanov, T. Nishioka, S. S. Pufu and B. R. Safdi, “Is Renormalized Entanglement Entropy Stationary at RG Fixed Points?”, *JHEP* **1210** (2012) 058 [arXiv:1207.3360 [hep-th]].
- [53] B. Swingle and T. Senthil, “A geometric proof of the equality between entanglement and

- edge spectra”, *Phys. Rev.* **B86** (2012) 045117, [arXiv:1109.1283].
- [54] P. Fendley, M. P. A. Fisher and C. Nayak, “Topological Entanglement Entropy from the Holographic Partition Function”, *J. Stat. Mech.* **126** (2007) 1111, cond-mat/0609072.
- [55] エントロピーバウンズの座標に依らない定式化は R. Bousso, *JHEP* **9907**, 004 (1999) [arXiv:hep-th/9905177].
- [56] T. Jacobson, “Black hole entropy and induced gravity”, gr-qc/9404039.
- [57] 今村洋介, 『超弦理論の基礎』, サイエンス社, SGC ライブラリ 80, 臨時別冊・数理科学 2011 年 1 月.
- [58] 谷井義彰, 『超重力理論』, サイエンス社, SGC ライブラリ 82, 臨時別冊・数理科学 2011 年 4 月.
- [59] フェルミオンとボソンを入れ替える変換に関して対称である理論を超対称性理論と呼ぶ. 詳しくは, 以下の教科書など参照. 太田信義・坂井典佑, 『超対称性理論』, サイエンス社, SGC ライブラリ 51, 臨時別冊・数理科学 2006 年 11 月.  
英語で書かれた標準的な教科書は, J. Wess and J. Bagger, “*Supersymmetry and Supergravity*”, Princeton Series in Physics, Princeton University Press.
- [60] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **428**, 105 (1998) [arXiv:hep-th/9802109].  
E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998) [arXiv:hep-th/9802150].
- [61] T. Takayanagi, “Holographic Dual of BCFT”, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 101602 [arXiv:1105.5165 [hep-th]].  
M. Fujita, T. Takayanagi and E. Tonni, “Aspects of AdS/BCFT”, *JHEP* **1111** (2011) 043 [arXiv:1108.5152 [hep-th]].
- [62] I. R. Klebanov and E. Witten, “AdS / CFT correspondence and symmetry breaking”, *Nucl. Phys. B* **556** (1999) 89 [hep-th/9905104].
- [63] E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 505 [hep-th/9803131].
- [64] A. Lewkowycz and J. Maldacena, “Generalized gravitational entropy”, *JHEP* **1308** (2013) 090 [arXiv:1304.4926 [hep-th]].
- [65] J. D. Brown and M. Henneaux, “Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity”, *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 207.
- [66] D. E. Berenstein, R. Corrado, W. Fischler and J. M. Maldacena, “The Operator product expansion for Wilson loops and surfaces in the large N limit”, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 105023 [hep-th/9809188].
- [67] S. S. Gubser, “Einstein manifolds and conformal field theories”, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 025006 [hep-th/9807164].
- [68] M. Headrick and T. Takayanagi, “A Holographic proof of the strong subadditivity of entanglement entropy”, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 106013 [arXiv:0704.3719 [hep-th]].

- [69] P. Hayden, M. Headrick and A. Maloney, “Holographic Mutual Information is Monogamous”, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 4, 046003 [arXiv:1107.2940 [hep-th]].
- [70] T. Barrella, X. Dong, S. A. Hartnoll and V. L. Martin, “Holographic entanglement beyond classical gravity”, arXiv:1306.4682 [hep-th].
- [71] T. Faulkner, A. Lewkowycz and J. Maldacena, “Quantum corrections to holographic entanglement entropy”, arXiv:1307.2892 [hep-th].
- [72] R. Emparan, “AdS / CFT duals of topological black holes and the entropy of zero energy states”, *JHEP* **9906** (1999) 036 [hep-th/9906040].
- [73] L. -Y. Hung, R. C. Myers, M. Smolkin and A. Yale, “Holographic Calculations of Renyi Entropy”, *JHEP* **1112** (2011) 047 [arXiv:1110.1084 [hep-th]].
- [74] D. V. Fursaev, “Proof of the holographic formula for entanglement entropy”, *JHEP* **0609** (2006) 018 [hep-th/0606184].
- [75] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, “A Covariant holographic entanglement entropy proposal”, *JHEP* **0707** (2007) 062 [arXiv:0705.0016 [hep-th]].
- [76] 重力理論がヌル・エネルギー条件を満たせば、共変的なホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーに対して強劣加法性が成り立つことが以下の論文で確認されている：  
 A. C. Wall, “Maximin Surfaces, and the Strong Subadditivity of the Covariant Holographic Entanglement Entropy”, arXiv:1211.3494 [hep-th].  
 R. Callan, J. -Y. He and M. Headrick, “Strong subadditivity and the covariant holographic entanglement entropy formula”, *JHEP* **1206** (2012) 081 [arXiv:1204.2309 [hep-th]].  
 A. Allais and E. Tonni, “Holographic evolution of the mutual information”, *JHEP* **1201** (2012) 102 [arXiv:1110.1607 [hep-th]].
- [77] J. de Boer, M. Kulaxizi and A. Parnachev, “Holographic Entanglement Entropy in Lovelock Gravities”, *JHEP* **1107** (2011) 109 [arXiv:1101.5781 [hep-th]].
- [78] N. Shiba, “Entanglement Entropy of Two Spheres”, *JHEP* **1207** (2012) 100 [arXiv:1201.4865 [hep-th]].
- [79] J. Cardy, “Some results on the mutual information of disjoint regions in higher dimensions”, *J. Phys. A* **46** (2013) 285402 [arXiv:1304.7985 [hep-th]].
- [80] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, “The Black hole in three-dimensional space-time”, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849 [hep-th/9204099].
- [81] J. M. Maldacena, “Eternal black holes in Anti-de-Sitter”, *JHEP* **0304** (2003) 021 [arXiv:hep-th/0106112].  
 平坦な時空におけるブラックホールの拡張された時空に対して、最初に Thermo field double の考えを対応させたのは以下の論文：  
 W. Israel, “Thermo field dynamics of black holes”, *Phys. Lett. A* **57** (1976) 107.
- [82] P. M. Chesler and L. G. Yaffe, “Horizon formation and far-from-equilibrium isotropization in supersymmetric Yang-Mills plasma”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 211601 (2009) [arXiv:0812.2053 [hep-th]]; “Boost invariant flow, black hole formation, and far-from-

- equilibrium dynamics in  $N = 4$  supersymmetric Yang-Mills theory”, arXiv:0906.4426 [hep-th].
- [83] S. Bhattacharyya and S. Minwalla, “Weak Field Black Hole Formation in Asymptotically AdS space-times”, *JHEP* **0909** (2009) 034 [arXiv:0904.0464 [hep-th]].
- [84] P. Calabrese and J. L. Cardy, “Evolution of Entanglement Entropy in One-Dimensional Systems”, *J. Stat. Mech.* **0504** (2005) P010 [arXiv:cond-mat/0503393]; “Entanglement and correlation functions following a local quench: a conformal field theory approach”, *J. Stat. Mech.* (2007) P010004 [arXiv:0708.3750]; “Quantum Quenches in Extended Systems”, [arXiv:0704.1880 [cond-mat.stat-mech]].
- [85] T. Takayanagi and T. Ugajin, “Measuring Black Hole Formations by Entanglement Entropy via Coarse-Graining”, *JHEP* **1011** (2010) 054 [arXiv:1008.3439 [hep-th]].
- [86] J. Abajo-Arrestia, J. Aparicio and E. Lopez, “Holographic Evolution of Entanglement Entropy”, arXiv:1006.4090 [hep-th].
- [87] T. Hartman and J. Maldacena, “Time Evolution of Entanglement Entropy from Black Hole Interiors”, *JHEP* **1305** (2013) 014 [arXiv:1303.1080 [hep-th]].
- [88] H. Liu and S. J. Suh, “Entanglement Tsunami: Universal Scaling in Holographic Thermalization”, arXiv:1305.7244 [hep-th]; “Entanglement growth during thermalization in holographic systems”, arXiv:1311.1200 [hep-th].
- [89] J. Bhattacharya, M. Nozaki, T. Takayanagi and T. Ugajin, “Thermodynamical Property of Entanglement Entropy for Excited States”, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 9, 091602 [arXiv:1212.1164].
- [90] D. D. Blanco, H. Casini, L. -Y. Hung and R. C. Myers, “Relative Entropy and Holography”, *JHEP* **1308** (2013) 060 [arXiv:1305.3182 [hep-th]].
- [91] M. Nozaki, T. Numasawa and T. Takayanagi, “Holographic Local Quenches and Entanglement Density”, *JHEP* **1305** (2013) 080 [arXiv:1302.5703 [hep-th]].
- [92] P. Calabrese and J. L. Cardy, “Entanglement and correlation functions following a local quench: a conformal field theory approach”, *J. Stat. Mech.* **10** (2007) P10004, arXiv:0708.3750.
- [93] G. T. Horowitz and N. Izhaki, “Black holes, shock waves, and causality in the AdS / CFT correspondence”, *JHEP* **9902** (1999) 010 [hep-th/9901012].
- [94] T. Ugajin, “Two dimensional quantum quenches and holography”, arXiv:1311.2562 [hep-th].
- [95] I. R. Klebanov, D. Kutasov and A. Murugan, “Entanglement as a probe of confinement”, *Nucl. Phys. B* **796** (2008) 274 [arXiv:0709.2140 [hep-th]].
- [96] Y. Nakagawa, A. Nakamura, S. Motoki and V. I. Zakharov, “Entanglement entropy of SU(3) Yang-Mills theory”, *PoS LAT* **2009** (2009) 188 [arXiv:0911.2596 [hep-lat]].
- [97] 藤本聡・川上則雄, 『量子多体系の物理』, サイエンス社, SGC ライブラリ 87, 臨時別冊・数理科学 2011 年 12 月.



- [98] 繰りこみ群を用いたフェルミ液体の場の理論的説明は, J. Polchinski, “Effective field theory and the Fermi surface”, In \*Boulder 1992, Proceedings, Recent directions in particle theory\* 235–274, and Calif. Univ. Santa Barbara – NSF-ITP-92-132 (92,rec.Nov.) 39 p. (220633) Texas Univ. Austin – UTTG-92-20 (92,rec.Nov.) 39 p [hep-th/9210046]. にある.
- [99] S. A. Hartnoll, “Lectures on holographic methods for condensed matter physics”, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 224002 [arXiv:0903.3246 [hep-th]].
- [100] J. McGreevy, “Holographic duality with a view toward many-body physics”, *Adv. High Energy Phys.* **2010** (2010) 723105 [arXiv:0909.0518 [hep-th]].
- [101] S. Sachdev, “The Quantum phases of matter”, arXiv:1203.4565 [hep-th].
- [102] 高柳匡, “物性物理とブラックホール熱力学”, 数理科学 2011 月 10 月号 39 頁, サイエンス社.
- [103] 夏梅誠, 『超弦理論の応用』, サイエンス社, SGC ライブラリ 93, 臨時別冊・数理科学 2012 年 9 月.
- [104] N. Ogawa, T. Takayanagi and T. Ugajin, “Holographic Fermi Surfaces and Entanglement Entropy”, *JHEP* **1201** (2012) 125 [arXiv:1111.1023 [hep-th]].
- [105] M. M. Wolf, “Violation of the entropic area law for fermions”, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 010404 [quant-ph/0503219].  
D. Gioev, I. Klich, “Entanglement entropy of fermions in any dimension and the Widom conjecture”, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 100503 [quant-ph/0504151].
- [106] Y. Zhang, T. Grover, A. Vishwanath, “Entanglement entropy of critical spin liquids”, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 067202 [arXiv:1102.0350[cond-mat]].
- [107] B. Swingle, L. Huijse and S. Sachdev, “Entanglement entropy of compressible holographic matter: loop corrections from bulk fermions”, arXiv:1308.3234 [hep-th].
- [108] C. Charmousis, B. Gouteraux, B. S. Kim, E. Kiritsis and R. Meyer, “Effective Holographic Theories for low-temperature condensed matter systems”, *JHEP* **1011** (2010) 151 [arXiv:1005.4690 [hep-th]].
- [109] L. Huijse, S. Sachdev, B. Swingle, “Hidden Fermi surfaces in compressible states of gauge-gravity duality”, *Phys. Rev.* **B85** (2012) 035121 [arXiv:1112.0573].
- [110] S. Kachru, X. Liu and M. Mulligan, “Gravity Duals of Lifshitz-like Fixed Points”, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 106005 [arXiv:0808.1725 [hep-th]].
- [111] 松枝宏明, “エンタングルメントで見る時空の幾何学構造とテンソル積波動関数”, 物性研究 (2011), 96(4):383–482.
- [112] J. I. Cirac, F. Verstraete, “Renormalization and tensor product states in spin chains and lattices”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009) 504004 [arXiv:0910.1130].
- [113] G. Vidal, “Entanglement Renormalization”, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 22, 220405 [cond-mat/0512165]; “Entanglement renormalization: an introduction”, arXiv:0912.1651.
- [114] B. Swingle, “Entanglement Renormalization and Holography”, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 065007 [arXiv:0905.1317 [cond-mat.str-el]].
- [115] J. Haegeman, T. J. Osborne, H. Verschelde and F. Verstraete, “Entanglement Renor-

malization for Quantum Fields in Real Space”, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 10, 100402 [arXiv:1102.5524 [hep-th]].

[116] M. Nozaki, S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic Geometry of Entanglement Renormalization in Quantum Field Theories”, *JHEP* **1210** (2012) 193 [arXiv:1208.3469 [hep-th]].

A. Mollabashi, M. Nozaki, S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic Geometry of cMERA for Quantum Quenches and Finite Temperature”, arXiv:1311.6095 [hep-th].

# 索引

## ア

アイソメトリー, 162  
アインシュタイン・ヒルベルト作用, 72  
アインシュタイン多様体, 92  
アインシュタイン方程式, 67  
荒木・リープ不等式, 14  
EPR ペア, 11  
異常金属, 148  
イジング模型, 24  
一般相対性理論, 1  
イレレバント, 75  
運動量カットオフ, 22  
AdS/CFT 対応, 4, 63, 68  
AdS/CMT, 149  
AdS ソリトン, 145  
エッジ状態, 59  
 $\mathcal{N} = 4$  超対称性ゲージ理論, 70, 145  
エネルギー運動量テンソル, 30  
エネルギーギャップ, 22  
 $F$  関数, 57  
 $F$  定理, 58  
エルミート演算子, 7  
エンタングルメント・エントロピー, 1, 9, 21, 65, 81, 116, 144, 149, 160  
エンタングルメント・スペクトラム, 11, 26, 59  
エンタングルメント・ハミルトニアン, 59  
エンタングルメント繰りこみ, 162  
エントロピー, 2  
エントロピー的  $F$  関数, 57  
エントロピー的  $c$  関数, 50  
エントロピーの凹性, 13  
エントロピーバウンド, 62  
オービフォールド空間, 21

オービフォールド理論, 38, 119

## カ

外曲率, 72, 105  
開弦, 70  
回転するブラックホール, 112  
ガウス・ボネ重力理論, 105  
カノニカル分布, 15, 115  
幾何学的エントロピー, 17  
ギボンズ・ホーキング項, 72  
ギャップレス, 22  
キャドニー・リンデン・ウインターの不等式, 94  
境界状態, 117, 122  
共形群, 27  
共形次元, 31, 74  
共形場理論, 24, 27, 69, 83, 116  
共形変換, 27, 98  
強結合極限, 71, 105, 148, 149  
共変的でホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー, 105  
強劣加法性, 13, 92, 106  
行列積状態, 161  
極小曲面, 82, 161  
局所量子クエンチ, 133  
極値曲面, 104  
グラハム・フェファーマン座標, 80  
繰りこみ群, 69  
経路積分, 32  
ゲージ重力対応, 71  
ゲージ理論, 70, 144  
弦の長さ, 71, 105  
高階微分の補正, 105  
古典重力近似, 71  
混合状態, 7, 111

コンパクト化, 36

## サ

サリス・エントロピー, 11  
 $c$  関数, 50  
 $c$  定理, 50  
紫外カットオフ, 22  
紫外極限, 22  
紫外発散, 1, 23  
時間に依存する背景, 104  
自然単位系, 2  
シャノンのエントロピー, 11  
自由エネルギー, 8, 77, 132  
自由スカラー場, 35  
自由ディラック・フェルミオン場, 35, 150  
重力, 1  
重力崩壊, 60  
シュレディンガー方程式, 7  
シュワルツシルド・ブラックホール, 60, 76  
シュワルツ微分, 37  
純粋化, 13  
純粋状態, 7, 111  
スケール不変, 22  
スケール変換, 28, 30  
正規化可能な変形, 74  
正規化不可能な変形, 73  
制限された密度行列, 9  
生成消滅演算子, 14  
漸近的に AdS, 76  
全量子次元, 25  
相関関数, 72  
双曲空間, 58  
相互情報量, 14, 94, 108  
相対エントロピー, 132  
粗視化, 117, 162  
損失角, 54, 103

## タ

大域的な AdS 時空, 67, 85  
体積則, 23  
タイプ IIB 超弦理論, 70  
中心電荷, 36, 92  
超弦理論, 2

超重力理論, 73  
超対称性, 4  
調和振動子, 14  
D ブレイン, 4, 69  
デイスエンタングラー, 163  
テンソルネットワーク, 161  
動的指数, 159  
特殊共形変換, 28  
閉じ込め, 79, 144  
閉じ込め・非閉じ込め相転移, 144, 147  
ドジッター時空, 56  
トフーフト結合定数, 70  
トポロジカル相, 25, 59  
トポロジカルなエンタングルメント・エントロピー,  
25, 94  
トポロジカルな秩序, 25, 59  
トポロジカルな場の理論, 59  
トポロジカルブラックホール, 96  
Tripartite information, 93  
トレース・アノマリー, 53

## ナ

2 次元共形場理論, 25, 30, 33, 83  
ヌル・エネルギー条件, 154  
熱化現象, 116  
熱力学的エントロピー, 8, 58, 79

## ハ

ハイパースケールリングの破れ, 159  
波動関数, 7  
場の理論, 1, 16  
バルク・エッジ対応, 59  
バルク/境界関係, 71  
反ドジッター時空, 58, 66  
BF バウンド, 74  
BTZ ブラックホール, 110  
比熱, 79, 154, 159  
非フェルミ液体, 148  
弦 (ひも), 2  
ビラソロ代数, 33  
ヒルベルト空間, 7  
フェルミ液体, 148  
フェルミオンのボソン化, 36, 120

フェルミ面, 148  
フォンノイマン・エントロピー, 8  
物質場, 64  
プライマリー演算子, 31  
ブラックホール, 2, 60, 76, 110, 155  
ブラックホール熱力学, 2, 61  
ブラックホールのエントロピー, 2, 23, 61, 111  
プランク長, 71, 106, 161  
分配関数, 8  
閉弦, 70  
並進変換, 28  
ベッケンシュタイン・バウンド, 133  
ベッケンシュタイン・ホーキングの面積公式, 2, 61, 78, 82  
ベルペア, 11  
ホーキング輻射, 60  
ボゴリューボフ変換, 15  
ボルツマンのエントロピー, 12  
ホログラフィー原理, 3, 63, 68, 164  
ホログラフィック双対, 63  
ホログラフィックなエネルギー運動量テンソル, 80, 129, 136  
ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー, 5, 81, 104, 114, 137, 145, 152, 160  
ホログラフィックな繰りこみ, 73  
ポワンカレ座標, 67, 84

## マ

マージナル, 75  
密度行列, 7  
ミンコフスキー時空, 27  
MERA, 162

面積則, 3, 22  
モジュラーハミルトニアン, 132  
モジュラー変換, 121

## ヤ

ユークリッド化, 75, 82  
有限温度, 110  
誘導された重力理論, 65

## ラ

ラージ  $N$  極限, 71, 94, 106, 148  
リフシッツの量子臨界点, 159  
量子エンタングルメント, 3, 10, 160  
量子クエンチ, 116  
量子相転移, 24  
量子的秩序パラメーター, 6, 24, 144  
量子臨界点, 24  
リンドラー時空, 64  
励起状態, 116  
劣加法性, 14  
レプリカ対称性, 99  
レプリカ場, 19, 40  
レプリカ法, 17, 99, 108, 118  
レレバント, 75  
連続極限, 22  
レンニ・エントロピー, 11, 98, 102  
ローレンツ変換, 28

## ワ

ワード・高橋恒等式, 31  
ワイル・アノマリー, 53  
ワイル変換, 30

著者略歴

高柳 匡

たかやなぎ ただし

- 2002 年 東京大学大学院理学系研究科博士課程修了，理学博士  
2002 年 ハーバード大学ジェファーソン研究所研究員  
2005 年 カリフォルニア大学サンタバーバラ校カブリ理論物理学研究所研究員  
2006 年 京都大学大学院理学研究科助手  
2008 年 東京大学数物連携宇宙研究機構特任准教授  
2011 年 第 4 回湯川記念財団・木村利栄理論物理学賞受賞  
2013 年 第 28 回西宮湯川記念賞受賞  
2016 年 仁科記念賞受賞  
現 在 京都大学基礎物理学研究所教授  
専 門 超弦理論，場の理論，量子重力

---

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ- 106

『ホログラフィー原理と量子エンタングルメント』（電子版）

著 者 高柳 匡

2017 年 3 月 10 日 初版発行 ISBN 978-4-7819-9925-8

この電子書籍は 2014 年 4 月 25 日初版発行の同タイトルを底本としています。

---

数 理 科 学 編 集 部

発行人 森 平 敏 孝

TEL.(03)5474-8816

FAX.(03)5474-8817

ホームページ <http://www.saiensu.co.jp>

ご意見・ご要望は [sk@saiensu.co.jp](mailto:sk@saiensu.co.jp) まで。

---

発行所 © 株式会社 サイエンス社

TEL.(03)5474-8500 (代表)

〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1-3-25

---

本誌の内容を無断で複写複製・転載することは，著者および出版者の権利を侵害することがありますので，その場合にはあらかじめサイエンス社著作権担当者あて許諾をお求めください。

組版 クォンタ