October 2018 MATHEMATICAL SCIENCES Number 664

特集／カラビ・ヤウ多様体

巻頭言

小林 正典

1. 重要なのに文献が少ない

カラビ (Calabi)・ヤウ (Yau)*1) 多様体は，1980 年代に素粒子物理学で時空のモデルになったことで広く脚光を浴びた．そこで導き出された顕著な性質であるミラー対称性は，2 つの異なるカラビ・ヤウ多様体から本質的に同じ情報が取り出せることを主張する．その対応では，カラビ・ヤウ多様体のもつ 2 つの全く異なる幾何構造（複素構造とシンプレクティック構造）が入れ替わる．この驚くべき予想はその後 30 年以上にわたり時代を牽引し続けており，そのパワーが深谷氏のコラムからも伝わってくる．

このように名前が広く知られているにもかかわらず，いまだに総合的な和文の教科書が存在しない．もともと，カラビ・ヤウ多様体は微分幾何や代数幾何の多様体の分類では基本単位の一つであり，それぞれの研究者の立場により，興味の方向も異なれば定義すらも微妙に異なる．各自が証明に使った仮定を満たす多様体を「カラビ・ヤウ多様体」と呼んでいるように感じるほどである．解説すべき性質の出自が複数の分野にわたるため，重要事項を網羅したテキストというのはとても作りにくい．定義をどれに決めるかという問題もあるし，専門でない分野について記述するのはなかなか自信が持てないものである．そこで今回は各分野で第一線に立つ専門家にそれぞれの立場からカラビ・ヤウ多様体について語っていただいた．

*1) 「ヤオ」とも表記される．

2. 幾何的な立ち位置

カラビ・ヤウ多様体という名前は，リーマン (Riemann) 多様体に対するカラビ予想をヤウが解決したことに由来する．後藤氏の解説では，由来から重要な例の構成方法まで丁寧に述べられている．ホロノミー群という強力な不変量があり，もしホロノミー群が直積に分解すると，多様体自体も適当な被覆をとれば対応する基本単位に分解してしまう（ドラム (de Rham) 分解）．

例えばシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(m)$（四元数の特殊直交群）は超ケーラー多様体に対応する．これは多様体としてはシンプレクティック多様体の「複素化」（複素シンプレクティック多様体）である．ハミルトニアンを用いた解析力学を幾何的に定式化すると，運動の状態の全体（相空間）はシンプレクティック多様体になり，保存量（ハミルトニアン）を固定したときの状態の全体はラグランジュ (Lagrange) トーラスになる（リューヴィル (Liouville)・アーノルド (Arnold)・ヨスト (Jost) の定理）．この複素多様体での対応物ともいえる定理を示した松下氏に最新の状況を解説していただいた．

多様体の可微分構造を固定しても，リーマン多様体では計量が変形し，複素多様体では複素構造が変形する．よって一般の多様体を基本単位の組合せとして理解しようとするとき，ホロノミー群による直積分解だけでは本質的に無理がある．

代数幾何には飯高理論があり，組合せとみなす