例題形式で探求する 微積分学の基本定理

関数の性質から幾何構造を探る

森田茂之著，B5 判，168 頁，本体 2037 円，サイエンス社

著者の森田茂之さんは筆者より 6 歳年上の大数学者である．修士のとき以来たびたび話をさせていただく機会があるのは至福の至りである．森田さんの『微分形式の幾何学』が 1996 年に岩波書店から上梓されたとき，数学書をしたためる極意を聞く機会があった．それは，筆をとる前に時間をたっぷりかけ周到な準備をすることという．どこまで準備すれば周到なのかもおぼつかないまま，本記事のような短文ですら深く考えずに書き始めてしまって，右往左往しながら発散する事態をなんとか収めようと苦悩する筆者には到底辿り着けない境地だが，本書はかくもまた著者の極意が体現されている．

微分形式は敷居が高いといわれることが多い．森田さんは英訳もされた『微分形式の幾何学』が全世界の多くのスマートな若者に大きな感銘を与えたことを実感していることは間違いない．と同時に，現代の多様体論は多変数の微積分学の基本定理の延長にあると会得している人が必ずしも多くはないことも実感し，それが本書を書くきっかけになったのではないだろうか．

ベクトル場と 1 形式は互いに双対な概念だが，一般には標準的対応がないところが本を書く側の最初のハードルである．これは有限次元線形空間とその双対空間はベクトル空間としては同型だが，対応は基底を定めない限り標準的には与えられないことに起因する．読者がこの事実を知っていたとしても，延々と続く理論の中でどのように影響しているかを意識するとは限らないので，微分形式を論じる著作には常に評価がつきまとう．

微分形式が如何に導入され得るかを再考してみる．ユークリッド空間の開集合に関しては標準的座標が用意されているので，これをもって理論展開する手がある．多様体は局所座標があるのでそれをもとに各種定義を与え，それらが座標系の取り方によらないことを確かめるという手法もある．思い切って微分形式を座標を使わずに性質をもって定義し，座標がある場合の具体的表示を与えるという方法もある．さらに進んで，リーマン計量があればベクトル場と 1 形式が自然に対応することを念頭に置けばそれなりの導入も可能である．だが，ここまでくると微分形式が微積分学の基本定理の延長に生まれたことを見抜く初学者はごく僅かだろう．

森田さんが本書を執筆するにあたり採用した方針は以下ではないだろうか．次元を主に 3 以下に限定したユークリッド空間の開集合の場合の説明に重きを置き，もちろん一般の次元の一般の多様体の場合にも言及．標準的基底の存在を至るところで利用しながら利用すること自体は本質的でないことを各所でほのめかし，多変数の微積分学と現代多様体論の橋渡しは各ステップでできるだけ目に見え計算できる形で例題として提示し，読者の理解を促す．

とくに，3 次元の場合にユークリッド座標を使えば，ベクトル場の空間と 1 形式および 2 形式の空間の間にそれぞれ 1 対 1 の対応がつき，さらに 0 形式である関数の空間と 3 形式の空間の間に 1 対 1 の対応がつき，これらの対応により「勾配は渦なし」と「回転はわきだしなし」というベクトル解析の事実が，対応するドラム複体の外微分を 2 回とるとゼロになるという事実に等価であることを示している．このようにベクトル解析とドラム複体の関係を明示的に記述した本を筆者は他に見たことがない．

多変数の微積分から多様体論へ繋げるカリキュラムはこうしたていねいな説明抜きでも論理的には可能だが，歴史を過小評価したツケとして敷居の高さが残る．本書はそのギャップを埋めることを目指している．実際，平易に書かれた本書を読んだ後に森田さんの『微分形式の幾何学』に進めば，その理解もたいへん深くなることは間違いない．多様体論を学ぶ前の予習書としても最適である．また，教育する側にとっても多くの貴重な示唆が得られる書物であることを，とくに記しておきたい．

小島 定吉（東京工業大学情報理工学院）