

## 可解な量子力学系の 数理物理

直交多項式の生み出す多様な展開

佐々木隆著, B5判, 192頁, 本体 2241円, サイエンス社



調和振動子や水素原子の周りの電子の運動の場合はシュレディンガー方程式を完全に解き切って、エネルギー準位、波動関数を完全に決定できる。ここで方程式を解く時に重要な役割を果たすのがエルミート多項式やラゲール多項式などの直交多項式である。

ただ、方程式が完全に解けるモデルは少なく、量子力学の教科書に書かれているような可解なモデルは特殊だと思う人が多いであろう。しかし、1960年ごろよりソリトン方程式などの可積分系が復活してきた中で再び可解性が数理学の様々な分野で復活してきた。また離散系を含めた直交多項式にも新しい光が当てられるようになってきた。本書は新時代の特殊函数の研究の中でも例外直交多項式あるいは多添え字直交多項式と呼ばれる、従来の直交多項式を一般化した新しい直交多項式の族を解説したものである。

直交多項式のうち有理係数2階常微分方程式を満たすものは古典的なヤコビ、ラゲール、エルミートしかない(ポホナーの定理)。これを拡張するためには何か条件をゆるめる必要があるが、可解な量子力学系を作るという目的がある以上は「2階微分方程式を満たす」ははずせない。そこで「全ての次数の多項式を生成する」ことを諦めて、いくつかの次数の多項式が抜け落ちた「穴のある」直交多項式を考えることにする。

本書では、新直交多項式を生成するクライン・アドラー変換を可解な量子力学系の構成とからめつつ記述(1章)したあと、可解な新しい系を見出す鍵が形状不変性(2章)にあると指摘する。そして、直交多項式と固有函数を結びつける正弦的座標と閉性関係式について述べた(3章)あとに、多添え字直交多項式を展開している(4章)。また、前半5章と後半5章は対になっており、後半は離散モデルを扱っている。

評者であれば、純粋に数学的に古典直交多項式から始めて、固有函数をいくつか「抜き取る」ダルブー変換について述べ、クライン・アドラー変換を用いて多添え字直交多項式を構成したのちにその応用例として量子力学系を解いていこう。しかし、本書は新しい可解量子力学系をどう構成するかという問題意識が常に原動力となっており、量子力学系と直交多項式が絶

えず絡み合ってダイナミックに議論が進む。実は、例外直交多項式の研究は2008年に始まったばかりであり、評者も佐々木隆さんらの研究発表を何度か聞いてその発展に目を見張っているところであった。その最先端の研究成果がスピーディにまとめられた本書からは新しい理論を建設したばかりの著者の躍動が伝わってくる。

最新の研究結果ではあるが、古典的な直交多項式や量子力学などを履修した大学4年生なら十分読める内容である。これから新たに研究の世界に入っていこうと思ってもまだ予備知識が少ない若い学生にとって、徒手空拳で新しい理論を構築している本書は研究するとはどういうことかを知る意味でも参考になると思う。

かつては、序文に「本書は予備知識は最小限に」とうたいつつも、抽象的な現代数学に慣れてないとさっぱり読めない数学書がたくさん出版された。本書の場合、予備知識も抽象数学もさほど必要ではないものの、行間を丁寧に埋めていく計算力が必要になってくる。細かい式変形も厭わず5章までの80ページを手を動かして計算していけば得るものが多いと思う。

冒頭には青本和彦氏による序言があり、書評としてこれ以上のものはないくらい鋭く的確である。本書を青本さんが最近著した直交多項式の本と比べると、内容的に直交するようにも感じられる。佐々木さんがこの本で例外直交多項式という新しい特殊函数の系列を提案したのなら、次に来るものは新直交多項式の個々の性質を調べて、青本さんの本に新章を加えるようなものになるであろう。そして、それはまだほとんど誰も手をつけていない未開の畑である。直交多項式は決して19世紀の枯れた古典ではなく、21世紀に甦った若々しい研究対象である。本書は、これから数理学の研究に入ろうとする若い学徒に研究の姿勢を示すとともに新しい研究テーマへと導いてくれる良きガイドである。時に長大な計算に悩むこともあるだろうが、そう感じる部分こそまさに生きた研究のお手本である。

大山陽介(徳島大学大学院理工学研究部)