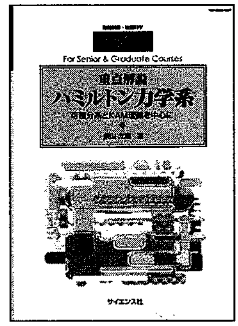
重点解説 ハミルトン力学系

可積分系とKAM理論を中心に



柴山允瑠著，B5 判，184 頁，本体 2176 円，サイエンス社

本書はハミルトン力学系の基礎から始まり，可積分系やその摂動である近可積分系の理論を解説している．特に，コルモゴロフ（Kolmogorov），アーノルド（Arnold），モーザー（Moser）らによる理論（以下，KAM 理論と呼ぶ）とその応用に重点が置かれている．これらの内容は決して易しいものではないが，周期外力付き振り子や制限 3 体問題等の多くの具体的な応用例に触れることで，読み手の理解が深まるように工夫されている．まえがきに「読者は大学 3 年以上または大学院生を念頭において執筆されている」とあるが，専門外の数学者がハミルトン力学系を学ぶ書物として十分お薦めできる．伊藤秀一氏の良書『常微分方程式と解析力学』と一緒に読むと，双方の理解をより深めることができるであろう．

以下，各章の内容を簡単に説明する．第 1 章，第 2 章は，「ラグランジュ系」，「ハミルトン系」に関する標準的な内容がまとめられており，予備知識のない人にも読めるように配慮されている．また，振り子の運動やケプラー問題の例がこの時点で導入されている．これらの例は，重要かつ本質的な問題を含んだものであり，章が進むにつれてより深く掘り下げられていく点は，この本の一つの特徴である．

第 3 章は，「シンプレクティック写像の力学系」が端的に解説されている．第 4 章は，第一積分の存在と系の対称性に関する「ネーターの定理」とリウヴィルの意味での可積分系における基本定理である「リウヴィル–アーノルドの定理」の証明が与えられている．また，多くの具体的なハミルトニアンに対して作用–角変数を求める計算が詳しく示されており，初学者にとってありがたい．第 5 章では，可積分系を摂動すると可積分性が一般には壊れるということを主張する「ポアンカレの定理」の証明が与えられている．

第 6 章「KAM 定理」，第 7 章「KAM 定理の応用」は，本書の核心部分である．KAM 定理は，近可積分系に対して，多くの不変トーラスおよびその上のクロネッカー軌道が摂動系でも存在することを保証する．本書では，コルモゴロフのアイデアがよく分かるように，いくつかの章区分に分けられ丁寧に説明されている．第 7 章では，KAM 定理の応用として，外力付き振り子の平衡点の安定性，制限 3 体問題のラグランジュ点の線形安定性が，バーコフ標準形の理論を通して説明されている．また，惑星どうしの弱い引力も考慮した太陽系の運動を理解することは，KAM 理論の一つの大きな動機であったことに触れ，そこでは KAM 定理に不可欠な非退化条件が満たされていないという難点についても言及している（大定理も万能ではない！）．この点が，第 2 章で詳細に説明された計算から洞察されるという説明には，本書の一貫性を感じさせる．3 体問題の 8 の字解の安定性に関する未解決問題にも触れている．これらの内容は，発展的であり本書の独創性を高めている．ところで，冒頭にあげた伊藤秀一氏の著書のまえがきに「ただし KAM 定理の証明は残念ながら割愛した．（抜粋）」とある．本書の第 6, 7 章は，このメッセージに応えたのではと臆断する．

第 8 章は，「KAM 定理の発展」ということで，KAM 定理後に見られる様々な発展に関する話題が提供されている．逆 KAM 理論，アーノルド拡散，断熱不変量，オーブリー–マザー理論，弱 KAM 理論に関する簡単な説明と主要な結果が証明なしに与えられている．ところで，筆者は弱 KAM 理論を偏微分方程式の立場から研究しているが，弱 KAM 理論を通じて，KAM 理論あるいは逆 KAM 理論を見直すことは，今後の重要な課題と考えている．

全体を通して読むことで天体力学と深く関わりながら高度な数学理論が発展してきた経緯を見てとることができる．終始丁寧に書かれていることが印象的で，本書を通じて著者のまじめな人となりが垣間見える．筆者も大学院の講義に本書を利用したい．注意深く読むと多くの重要な未解決問題に関する話題を提供しており，これから力学系理論を学び研究者を目指したいという方に，ぜひ読んでほしい一冊である．

三竹 大寿（広島大学大学院工学研究科）