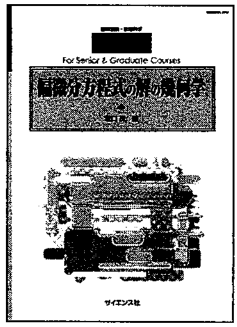
偏微分方程式の解の幾何学



坂口茂著，B5 判，112 頁，本体 2037 円，サイエンス社

本書は，著者である坂口茂氏と共同研究者達による研究成果を基にして，偏微分方程式の解に対する幾何学的性質と方程式が定義されている領域の形状との関係について平易に解説したものである．偏微分方程式が定義されている領域の幾何学的な特徴が解の性質に反映されると考えるのは自然であり，そのような研究もよく見かける．本書は，その逆である，方程式の解の性質から領域の形を定めるという他に類を見ない問題を扱っており，それが本書の特色である．

偏微分方程式の研究と言えば，解の存在，一意性，安定性，滑らかさ，漸近挙動等の解析的な研究を思い浮かべる研究者は多いと思う．勿論，これらの研究は重要で興味深いものであるが，解の幾何学的性質の研究はこれらとは違った面白さがある．本書のまえがきにもあるように，「初等幾何学において一本の補助線を発見することにより解法が鮮やかに浮かび上がるように」幾何学的洞察は重要な役割を演じ，ときには予期しない有用な結果を導くことがある．本書では数理物理等のモデルに現れる偏微分方程式の解についてその幾何学的性質のいくつかを数学解析の手法を用いて抽出し，その過程の中で幾何学的洞察・手法や偏微分方程式の基礎的な理論の有用性について解説している．

本書において重要な幾何学的洞察として反射原理がある（第 5 章）．反射原理を平たく言うと，偏微分方程式の解をある直線や平面に関して対称になるように拡張すると，拡張した関数も同じ方程式を満たすというものである．この原理に基づくアレクサンドロフの平面移動法（第 6 章）を用いて，単一媒質上の拡散方程式の解が動かない等温面を 1 つ持つとき，方程式の領域は球に限ることを証明している（定理 8.3）．もう 1 つの重要な幾何学的洞察として，楕円型方程式に対する過度境界値問題に対する領域の優決定定理の証明で用いられた角度微分作用素がある（第 7 章）．これは極座標に関する角度方向の微分を表しており，この作用素を使って，複合媒質上の導電場方程式に対して，外側の全ての一様な電場に影響を与えない中性導体は同心球に限ることが示されている（定理 7.6）．

これらの原理に依らないで得られる，偏微分方程式の解に対する幾何学的性質もいくつか紹介されている．その 1 つとして，領域の境界に接している球の持つ初期時刻付近での熱量と接点での境界の主曲率との関係を表す漸近公式（定理 4.4，補題 8.14）があり，これを用いて複合媒質上の拡散方程式に対して，その解が動かない等温面を持てば方程式の領域は同心球からなることが証明されている（定理 8.11）．

本書で用いられている解析的手法は発散定理，（強，および弱）最大値原理，ホップの補題，基本解等である．これらの内容は楕円型，或いは放物型偏微分方程式に関する標準的な本に載っている．先述の幾何学的洞察とこれらの内容をうまく組み合わせることで，上述のような非常に興味深い定理が得られることは少なくとも評者にとっては驚きである．

評者も本書を読み始めたときは，冒頭で書いたように本書は他に類を見ない問題を扱っているため，この方面の研究事情をよく知らないままで読み通せるかどうかわずかな不安もあったが，それは全くの杞憂であった．大部分が自己完結的で非常に読みやすく書かれている．そのため，本書は大学院生の自習書として使うことができ，内容も十分理解できるだろうと感じた．本書で使われている解析的手法に関しては上述のように偏微分方程式に関する標準的な内容が多く，必要な範囲で本書でも述べられている．足りない部分は参考文献に挙げられている成書を勉強することで補えるであろう．或いは，適切な指導の下でのセミナーや大学院生同士の輪講で勉強すれば，本書の内容や偏微分方程式に対する基本的な理論だけでなく，問題の捉え方等も学べるのではないかと思う．

偏微分方程式の解に対する幾何学的な研究は現在も進歩しているが，この方面に関する日本語による成書は本書が初めてであろう．本書を通して，多くの（特に若手）研究者にこの方面の研究に興味を持っていただきたい．

石井　克幸（神戸大学大学院海事科学研究科）

BOOK REVIEW