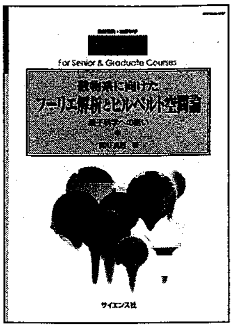
数物系に向けた フーリエ解析とヒルベルト空間論

量子科学への誘い

廣川真男著，B5 判，192 頁，本体 2204 円，サイエンス社



本書は量子力学の背景となる数学に関する教科書である．学部の量子力学の授業で学生に数学的な細かいことはとりあえず気にしなくてよろしいと教えている身としては，いささか耳の痛い内容である．「細かいこと」というのは，例えば，フーリエ変換の収束性，リーマン積分とルベーグ積分の違い，無限次元ヒルベルト空間の扱い方，など．学部の授業でどこまで教えるかはさておき，量子力学を扱う理論物理学者としては一度はしっかり勉強しておきたい内容がまとめられている．正直なところ，私はこのような数学が得意とは言えないが，物理家から見た感想を述べさせていただこうと思う．

序論でも述べられているとおり，本書は共振器量子電磁気学（cavity quantum electro dynamics, cavity QED）を理解することを最終目標として書かれている．タイトルにあるフーリエ解析やヒルベルト空間論について詳しく語ろうとするといくらでも長くなりそうであるが，本書では cavity QED の理解という目的に向かって，必要最低限の項目を並べる形でコンパクトにまとめられている．フーリエ級数の定義や量子論の概念など，基礎的な事項から丁寧に説明されているため，自己完結した教科書となっている．しかしながら，物理の授業では数学的な背景があまり説明されないことから，量子力学を一通り勉強し終えた学生が読むとちょうどよいと思われる．本書の大半は物理学科で学部 4 年次までに習う量子力学およびそれに関する数学であるが，数学的に厳密に議論を進めることで量子力学の奥深さがより認識されるであろう．

本書の第 1 章は弦を伝わる波動方程式の導出からはじまる．離散的な振動粒子系の運動方程式，およびその連続極限となる波動方程式，ダランベールの解について述べられた後，クライン–ゴルドン方程式についても言及されている．第 2 章はフーリエ級数について述べられている．特に，フーリエ級数展開の一意性の証明に絡んで，関数のノルムがこの章で定義されている．第 3 章はフーリエ変換であるが，ここではリーマン積分とルベーグ積分の違いが丁寧に述べられている．アナログ–デジタル信号変換を例にとった説明がわかりやすく，物理の学生にとってはイメージのわきやすいものではないかと思う．また，1〜3 章では初期値・境界値問題についても詳しく書いてあり，波動方程式の解法の教科書としても使え便利である．

第 4 章からは量子力学の話に移る．すでにフーリエ変換を導入しているため，運動量演算子 $\hat{p} = i\hbar\partial/\partial x$（$x$ は座標）などの正準量子化の作用が自然に導かれる．第 4 章で，歴史的な背景とともに，標準的な量子力学の数学的構造（ブラ，ケット，内積空間，演算子，etc.）が述べられた後，第 5 章の第 2 量子化へと進んでいく．cavity QED を議論するにあたって，本章の場の量子化は一つのハイライトであろう．量子場は生成・消滅演算子を用いたハミルトニアンに対してハイゼンベルグ方程式を満たす演算子として定義され，位置演算子のハイゼンベルグ描像となっていることが示される．後の議論に必要なコヒーレント状態およびドレスト光子についても本章で述べられている．

第 6 章はヒルベルト空間論について述べられている．ベクトル空間の一般論からはじまるが，波動関数が存在しているベクトル空間が無限次元となる点が量子論の数学を難しくしている．ヒルベルト空間では内積空間が完備でなくてはならず，第 3 章で導入されたルベーグ積分が重要な役割をしていることがここで明らかになる．第 7 章ではさらに，ヒルベルト空間に作用する演算子について述べられている．無限次元の場合，演算子の大きさが無限となる非有界演算子が存在する．非有界演算子は作用できる状態に条件がつくため，その条件から物理的な観測量とはどのような演算子であるかが議論されている．

第 8 章はこれまでの応用として，cavity QED のモデルとなる 2 準位人工格子と 1 モード格子の相互作用を扱っている．これまで本書で述べられてきた数学が単なる数学的な興味にとどまらず，数理的な解析により物理の知見を得るという例になっており，数学という道具の実用性を実感できる結び となっている．

川口 由紀（名古屋大学大学院工学研究科）