



粗幾何学入門

「粗い構造」で捉える非正曲率空間の幾何学と離散群

深谷友宏著, B5判, 200頁, 本体 2320円, サイエンス社

粗幾何学は距離空間（またはより一般の対象）を大きなスケールの視点から研究する分野であり、二つの距離空間が大きなスケールで見たとときにある意味で似ていると見えれば近いと見做す。この幾何学では遠くから眺めることにより整数点全体と実数全体は同じと見做される。粗幾何学を考える動機としては幾何学的群論と非可換幾何学におけるバウム-コンヌ予想がある。幾何学的群論は幾何学的な対象への群作用を通して（無限離散）群を研究するグロモフによって提唱された分野であり、バウム-コンヌ予想は群の分類空間の K ホモロジーと群 C^* 環の K 理論との同型を問うているものである。本書の一つのゴールは粗バウム-コンヌ予想を説明することといくつかの群や空間に対してこの予想が成立することを解説することにあるように思える。少なくとも筆者にとってこの分野に関する初学者向けの和書はこれまでに見たことはない。

この本の一つの大きな特色として、著者と尾國新一氏との粗バウム-コンヌ予想の研究で使われている粗ホモトピーの手法について触れられている点があげられる。著者は尾國氏との研究において粗凸空間を導入し、粗凸空間に対するカルタン-アダマールの定理を粗ホモトピーの言葉で示している。粗凸空間はグロモフ双曲空間や $CAT(0)$ 空間、プーズマン非正曲率空間、シストリック複体などを含む広いクラスの距離空間であり、粗カルタン-アダマールの定理の応用として固有な粗凸空間に対して粗バウム-コンヌ予想が示される。このような統一の視点から粗バウム-コンヌ予想の成立を解説している本は世界中を見渡してもまだない。

第1章から第6章までは主に距離空間の話である。前提知識としてリーマン幾何の話を少し知っていると理解の助けになると思うが、知らなくても読めるようになっている。

第1章では空間の「粗い構造」の定式化について解説を行っている。また有限生成群に対してケーリー・グラフを導入し幾何学的対象と見做す準備を行う。その後、粗ホモトピー、開錘、コンパクト化の話に進んでいく。

第2章では粗構造の違いを測る一つの指標として距離空間の増大度を導入し性質を解説している。

第3~4章ではグロモフ双曲空間が解説されている。グロモフ双曲空間の入門書としてはジスとドゥ・ラ・アルプによる本 *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov* が有名であるが仏語で書かれているために仏語に馴染みのない初学者にとっては敷居が高い面がある。英訳もある程度できているがまだ途中の段階であるようだ。グロモフ双曲空間に対して日本語で丁寧な解説を読めることはこの分野の日本語圏の初学者にとっての手助けとなることは間違いない。

第5章では非正曲率距離空間について解説をしている。そのうちプーズマン非正曲率空間から次章で粗凸空間が自然と導入される。シストリック複体についても解説がなされている。

第6章では粗凸空間を導入し、その空間の持つ性質の解説を行っている。様々な空間が粗凸空間の例になっていることを紹介している。次いで粗凸空間に対する粗幾何学版のカルタン-アダマールの定理を示している。

第7章は粗ホモロジー論を扱い、ホモロジー論になじみがあれば読めるようになっている。

第8章は発展的内容であり、粗バウム-コンヌ予想の定式化と予想が成立する空間についていくつか示されている。特に固有な粗凸空間に対して予想が示される。また粗バウム-コンヌ予想と至る所正のスカラー曲率を持つ計量の非存在型定理の関係やノビコフ予想との関係についても触れられている。

第9章では粗幾何学に関する幾つかの話題、例えばユウによるヒルベルト空間への粗埋め込み可能性が粗バウム-コンヌ予想を与えるといったこと等が触れられている。

この本は手短にかつ丁寧な説明で最先端の研究に引張っていつくれる。適宜付録等で予備知識を補いつ読み進めればためになる好著である。

船野 敬 (東北大学大学院情報科学研究科)