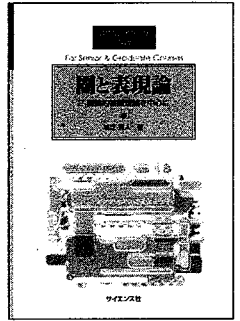


圏と表現論

2-圏論的被覆理論を中心に

浅芝秀人著, B5判, 248頁, 本体2600円, サイエンス社



浅芝氏と初めて御会いしたのは、2009年3月だっただろうか。信州大学で開かれた代数学若手研究会に、特別講演の講師として招かれていたときのことであった。私の記憶が間違っていなければ、その講演は、本書のテーマである、群作用を持つ圏の表現に関する話だったと思う。表現論については素人であったが、そのような話題に触れたことがなかったこともあり、とても新鮮で興味深く聴かせていただいたことを記憶している。ここでは、そのような素人の視点により、本書の特徴について書かせてもらうことにする。

本書を読むにあたっては、まず、タイトルにもある「圏」の意味について、理解しておいたほうがよいと思う。本書において、圏の役割は二つある。一つは、多元環のような代数的構造の一つ決めたとき、その表現全体の成す圏である。そのような圏の構造を調べるのが、タイトルの後半の「表現論」の意味するところである。ところが、ややこしいことに、その多元環自体も圏とみなすことができるのである。他にも、本書に登場する群も、圏とみなすことができる。このような、代数的構造の一般化が、本書でのもう一つの圏の役割である。例えば、群 G の元 g を、仮想的な対象 $*$ から $*$ への「矢印」とみなし、 G の積で合成を定義すると、唯一の対象 $*$ を持つ圏となる。多元環 A の場合も、 A の元を射とみなし、積により合成を定義すれば、対象が一つの圏となる。ただしこの場合、射全体がベクトル空間を成す、線形圏と呼ばれるものであるが。

最近では、様々な分野で圏と関手の言葉が使われるようになり、圏論もかなり一般的になってきたと思う。しかしながら、ある程度圏論の基礎がある人でも、多元環を圏とみなしたり、表現のなす圏のような「大きな圏」と多元環のような「小さな圏」を一体として扱うことに慣れていないことは多いと思う。そのような感覚を養うための題材としては、本書で扱われている線形圏の表現論は、最適なものの一つだろう。また、このような議論を行う際には、必然的に「ある種の圏全体の成す圏」を用いる必要が出てくるが、その際には集合論的な困難が伴うことはよく知られている。それ

を克服する方法として、グロタンディークの導入した宇宙という概念があるが、本書では、圏論のための集合論的基礎について、宇宙を用いて詳しく記述されている。筆者の知る限り、日本語でこのような内容について書かれたものとしては唯一のものだと思う。

「圏の圏」を扱うときには、さらにもう一つ必要となる概念がある。2-圏という概念である。圏を対象とし関手を射とすると圏ができるが、関手の間には自然変換がある。自然変換自体合成もできるので射のようなものである。このような射の間の射を2-射といい、誤解を恐れずに言えば、2-圏とは2-射を持つ圏のことである。また、2-圏では、二つの射について、「ピッタリ同じではないが2-射により同型になる」ということがよく起こる。そのため、2-圏の間の関手としては、射の合成を保つという条件は現実的ではない。関手で写してから合成した射と合成してから写した射の間に2-射による同型、そしてより一般に、単に2-射が存在する、という条件に弱める必要がある。このような複雑な構造を扱う必要があるため、2-圏に関する命題の証明には、射と2-射が入り交じった図式が必要になり、非常に煩雑である。幸い、2-圏やその特別な場合であるモノイダル圏を扱うために導入された、ストリング図という記法がある。本書は、日本語で本格的に2-圏を扱っている書籍としても初だと思うが、さらにストリング図の使い方を実践的に学ぶことができるのは貴重である。

個人的には、本書を読む際には、もう一つ「圏=空間」と「2-射=ホモトピー」という感覚があると良いと思う。冒頭で述べたように、表現論の素人であるにもかかわらず浅芝氏の講演を楽しむことができたのは、専門であるホモトピー論を通じて、この感覚を身につけていたからに他ならない。本書の主題である被覆理論は、位相空間の被覆空間の類似だからである。

このように、本書では多種多様な圏論的構造が表れる。日本語により、実践的に様々な圏論的感覚を磨くことのできる、稀有な本であると思う。

玉木大 (信州大学理学部)